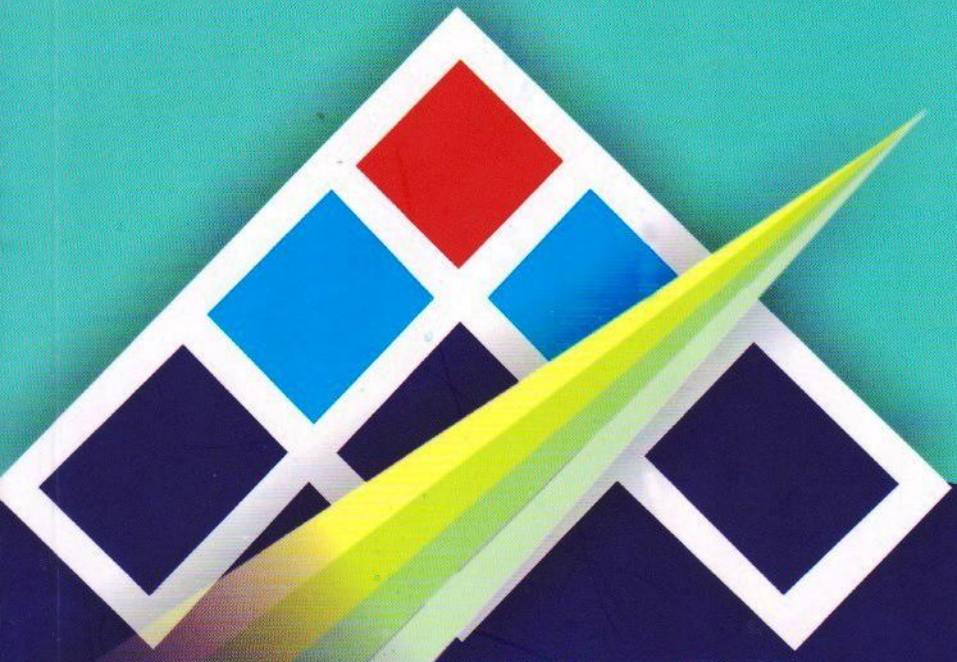


Dr. Zainal Abidin, M.Pd.



PENGANTAR TEORI HIMPUNAN DAN HIMPUNAN KABUR

(Fuzzy Sets Theory)



Ar-Raniry Press, 2014
DARUSSALAM BANDA ACEH

PENGANTAR TEORI HIMPUNAN DAN HIMPUNAN KABUR (Fuzzy Sets Theory)

Dr. Zainal Abidin, M.Pd.

Ar-Raniry Press

2014

PENGANTAR TEORI HIMPUNAN DAN HIMPUNAN
KABUR (*Fuzzy Sets Theory*)

Edisi 2014, Cetakan 2014
Ar-Raniry Press
Vi + 150 hlm. 13 x 20.5 cm
ISBN 978-979-3717-75-3

Hak Cipta Pada Penulis
All Rights Reserved
Cetakan Desember, 2014

Penulis : Dr. Zainal Abidin, M. Pd.

Diterbitkan oleh:

Ar-Raniry Press

Jl. Lingkar Kampus Darussalam Banda Aceh 23111
Telp. (0651) – 7552921/Fax. (0651)- 7552922
E-mail: arranirypress@yahoo.com

KATA PENGANTAR

Syukur Alhamdulillah penulis ucapkan pada Allah SWT yang telah melimpahkan rahmat dan hidayah-Nya sehingga penulisan buku ini dapat terlaksana dengan sempurna. Selawat serta salam juga penulis sampaikan pada junjungan alam Nabi Muhammad SAW yang telah menunjukkan titik terang dan membuka mata penulis sehingga penulisan buku ini terlaksana sesuai dengan harapan.

Buku "PENGANTAR TEORI HIMPUNAN DAN HIMPUNAN KABUR (*Fuzzy Sets Theory*)" ini merupakan buku pertama dari penulis tentang materi baru dari perkembangan matematika saat ini. Teri kabur merupakan salah satu bagian matematika yang berkembang sangat pesat dewasa ini baik dalam teorinya maupun dalam implementasi dalam berbagai cabang ilmu pengetahuan dan teknologi.

Mengingat buku-buku yang berkaitan dengan teori kabur masih sangat langka dalam bahasa Indonesia, maka buku ini diharapkan dapat menjadi pengantar dan pembuka pikiran kita tentang fenomena-fenomena yang ada dalam kehidupan kita yang belum tergambarkan dalam matematika yang sekarang ini kita pelajari. Buku ini masih jauh dari kesempurnaan, oleh karena itu penulis sangat mengharapkan masukan-masukan dari berbagai pihak demi penyempurnaan isi buku ini pada waktu-waktu mendatang sehingga buku ini menjadi sempurna dan dapat digunakan

oleh mahasiswa dalam mengembangkan pengetahuannya tentang teori himpunan dan himpunan kabur.

Penulis sangat berterima kasih pada pihak-pihak yang telah mendukung atas terlaksananya penerbitan buku ini terutama pada UIN Ar-Raniry yang telah bersedia mencetak dan menerbitkan buku ini.

Wassalam,

Penulis

DAFTAR ISI

Kata Pengantar

BAB 1 HIMPUNAN TEGAS, 1

- 1.1 Pendahuluan Himpunan, 1
- 1.2 Keanggotaan Himpunan, 5
- 1.3 Himpunan Bagian, Himpunan Kuasa, Persamaan Himpunan, 12
- 1.4 Himpunan Terhingga dan Tak hingga, 15
- 1.5 Operasi Himpunan, 17
- 1.6 Hukum De Morgan, distribusi, table, 25

BAB 2 RELASI, 31

- 2.1 Himpunan Berurutan, produk cartesius, 31
- 2.2 Pendahuluan relasi, 34
- 2.3 Order relasi, 40
- 2.4 Equivalensi relasi, 43

BAB 3 FUNGSI, 51

- 3.1 Definisi dasar, 51
- 3.2 Fungsi satu-satu, fungsi onto, fungsi bijektif, 56
- 3.3 Fungsi invers dan Permutasi, 61

BAB 4 LATAR BELAKANG TEORI KABUR

(Fazzy Theory), 67

- 4.1 Fenomena Fakta Kekaburan, 67
- 4.2 Kekaburan Semantik, 69
- 4.3 Dasar Himpunan Kabur, 71

4.4 Perkembangan Teori Kabur, 73

4.5 Pelopor Teori Kabur, 77

4.6 Perbedaan Teori Kabur dengan
Teori Probabilitas, 80

BAB 5 TERMINOLOGI HIMPUNAN KABUR, 83

5.1 Pengantar Himpunan Kabur, 83

5.2 Definisi Dasar dan Terminologi, 84

5.3 Latihan, 97

BAB 6 FUNGSI KEANGGOTAAN HIMPUNAN KABUR, 99

6.1 Fungsi Keanggotaan, 99

6.2 Formulasi Fungsi Keanggotaan (FK) dan
Parameterisasi, 101

6.3 Latihan, 111

BAB 7 OPERASI PADA HIMPUNAN KABUR, 113

7.1 Operasi Dasar Himpunan Kabur, 113

7.2 Pendefinisian Lain Operasi Gabungan, Irisan, dan
Komplemen Himpunan Kabur, 120

7.3 t -norm dan t -conorm (s -norm) Terparameter, 131

7.4 Latihan, 132

BAB 8 APLIKASI TEORI KABUR, 137

8.1 Aplikasi dalam Sistem Kendali Kabur, 139

8.2 Aplikasi dalam Bidang-bidang Lainnya, 145

DAFTAR PUSTAKA, 148

RIWAYAT HIDUP, 149

BAB 1



HIMPUNAN

1.1 Pendahuluan Himpunan

Matematika adalah cabang ilmu pengetahuan yang berkaitan dengan berbagai macam jenis objek seperti bilangan, garis, bidang, segitiga, lingkaran, sudut, persamaan, fungsi dan seterusnya. Objek-objek yang memiliki sifat sama atau dengan sifat umum dapat dikelompokkan ke dalam himpunan-himpunan. Ditinjau dari banyaknya objek-objek yang ada dalam suatu himpunan, himpunan tersebut dapat bersifat terhingga maupun tak terhingga. Objek-objek yang telah dikelompokkan ke dalam suatu himpunan disebut anggota himpunan. Jika suatu objek merupakan anggota dari sebuah himpunan M , kita tulis

$$a \in M$$

Dibaca: a adalah anggota dari M

Jika a bukan merupakan anggota dari M , maka kita tulis

$$a \notin M$$

Dibaca: a bukan merupakan anggota dari M

Contoh 1.1.1

1. Jika Q adalah himpunan dari semua persegi dan A adalah sebuah jajar genjang, maka $A \in Q$. Jika C adalah sebuah lingkaran, maka $C \notin Q$

2. Jika G adalah himpunan dari semua bilangan genap, maka $16 \in G$ dan $3 \notin G$
3. Jika L adalah himpunan dari semua penyelesaian persamaan $x^2 = 1$, maka 1 adalah sebuah anggota dari L ditulis $1 \in L$ sedangkan 2 bukan anggota dari L ditulis $2 \notin L$.

Secara umum ada dua cara menggambarkan sebuah himpunan:

- Dengan menyebutkan semua anggotanya antara kurung kurawal dan dipisahkan dengan tanda koma, contoh:

$$\{0\}$$

$$\{2, 67, 9\}$$

$$\{x, y, z\}$$

Perlu digarisbawahi bahwa, contoh diatas mungkin hanya untuk himpunan dengan anggota yang relatif sedikit. Jika terdapat banyak anggota sekaligus ingin menyebutkan anggotanya secara eksplisit beberapa penggalan digunakan: seperti contoh,

$$\{0, 1, 2, 3, \dots\}, \{2, 4, 6, \dots, 20\}$$

Pengertian yang diberikan harus jelas dari segi konteksnya. Dalam gambaran ini atau metode eksplisit, sebuah anggota dapat disebut lebih dari sekali, dan urutannya dimana anggota yang muncul adalah tidak relevan. Jadi, semua contoh berikut menjelaskan himpunan yang sama:

$$\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 1\}, \{1, 1, 3, 2, 3\}$$

- Dengan pemberian sebuah aturan yang menentukan jika sebuah objek yang diberikan dalam himpunan atau tidak; disebut juga penjelasan implisit; sebagai contoh,

1. $\{x: x \text{ adalah bilangan asli}\}$
2. $\{x: x \text{ adalah bilangan asli}\} \text{ dan } x > 0$
3. $\{y: y \text{ penyelesaian } (y + 1) \cdot (y - 3) = 0\}$
4. $\{p: p \text{ adalah bilangan prima genap}\}$

Biasanya, terdapat lebih dari satu cara dalam menggambarkan sebuah himpunan. Jadi, ini dapat dituliskan:

1. $\{0, 1, 2, \dots\}$
2. $\{1, 2, 3, \dots\}$
3. $\{-1, 3, \dots\}$
4. $\{2\} \text{ or } \{x: 2x = 4\}$

Secara umum dapat digambarkan sebagai berikut: himpunan A ditentukan dengan mendefinisikan sifat P dari anggotanya sebagai berikut:

$$\{x: P(x)\}$$

Dimana $P(x)$ berarti bahwa x mempunyai sifat yang digambarkan oleh P . Huruf x berfungsi sebagai variabel untuk objek; setiap huruf yang lain, atau simbol kecuali P , akan berfungsi secara sama. Sama halnya, P adalah sebuah variabel untuk sifat atau terkadang disebut *predicates/predikat/kebenaran*. Untuk menghindari terjerumus kedalam logika yang sulit, akan selalu diasumsikan bahwa tujuannya adalah menggambarkan kebenaran P dari definisi

yang telah didefinisikan secara baik sebelumnya, sebut saja M , dan terkadang kita menyebutnya secara eksplisit. Pada umumnya, digambarkan himpunan sebagai berikut:

$$\{x: x \in M \text{ and } P(x)\}$$

Ketentuan berikut akan digunakan dalam menggambarkan himpunan bilangan tertentu:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ adalah himpunan bilangan asli
- $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, \dots\}$ adalah himpunan bilangan asli positif
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ adalah himpunan bilangan bulat
- $\mathbb{Q} = \left\{x: x = \frac{a}{b}\right\}$, dimana $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \text{ dan } b \neq 0$ adalah himpunan bilangan rasional; perhatikan bahwa setiap bilangan rasional adalah hasil bagi dari dua bilangan bulat.
- $\mathbb{R} = \{x: x \text{ adalah bilangan real}\}$

Kita tidak akan memberikan definisi yang tepat pada bilangan real; ini dapat diasumsikan bahwa terdapat definisi intuitif terhadap bilangan real.

1.1.1 Latihan

Latihan 1. Gambarkan himpunan berikut secara eksplisit:

$$A = \{x \in \mathbb{Z}: x \leq 5\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ dapat dibagi } 24\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{R}: x = 2\}$$

$$A = \{x \in \mathbb{N}^+: x \leq 0\}$$

Latihan 2. Tentukan sebuah sifat P dan himpunan M sebagaimana tertulis dalam himpunan berikut dalam bentuk $\{x \in M : P(x)\}$:

$$A = \{1, 2, 4, 8, 16\}$$

$$B = \{6, 4, 8, 2, 0\}$$

$$A = \{1, 3, 5, 7\}$$

$$A = \{3, 5, 11, 2, 7, 13\}$$

1.2 Keanggotaan Himpunan

1.2.1 Penyataan anggota himpunan

Untuk menyatakan suatu himpunan diketahui ada 4 macam cara dalam menyatakan suatu himpunan, yaitu:

- Mencacah anggotanya (enumerasi).

Himpunan dinyatakan dengan mendaftarkan semua anggotanya dengan diletakkan didalam sepasang tanda kurung kurawal, dan diantara setiap anggotanya dipisahkan dengan tanda koma.

Contoh: Himpunan huruf vokal: $B = \{a, i, u, e, o\}$.

Himpunan tidak harus menyebutkan anggotanya secara berurutan. Ketika urutan itu dianggap penting, maka struktur yang berbeda akan diperlukan untuk menyatakan urutannya. Inilah yang disebut sebagai *ordered n-tuples*. Dalam struktur ini jika tertulis $(a, b, c, \dots)$ maka a akan menjadi elemen pertama, b elemen ke dua, c elemen ketiga dan seterusnya.

b. Menggunakan simbol standar (baku)

Himpunan dapat dinyatakan dalam simbol standar (baku) yang telah diketahui dan disepakati secara umum oleh masyarakat (ilmiah).

Contoh:

N = himpunan bilangan alami (natural)

Z = himpunan bilangan bulat

Q = himpunan bilangan rasional

R = himpunan bilangan riil

C = himpunan bilangan kompleks

Namun penulisan dengan cara ini menimbulkan ambiguitas pada kasus-kasus tertentu misalkan dalam kasus: $R = \{ 2,3,5,7,...,19 \}$. Penulisan himpunan seperti ini bukan merupakan *well-defined* karena memunculkan ambiguitas, yaitu R dapat diartikan sebagai himpunan bilangan ganjil yang lebih besar dari 1 dan kurang dari 20. Sementara itu R dapat diartikan pula sebagai himpunan bilangan prima yang kurang dari 20. Oleh karena itu pendefinisian himpunan dengan menyatakan pola seperti ini harus sangat hati-hati agar tidak menimbulkan tafsiran lain.

c. Menuliskan kriteria syarat keanggotaan himpunan

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan kriteria (syarat/ciri-ciri umum) keanggotaan himpunan tersebut. Himpunan ini dinotasikan sebagai berikut :

$\{ x \mid \text{syarat yang harus dipenuhi oleh } x \}$

Contoh:

(i) $A = \{ x \mid x \text{ adalah himpunan bilangan bulat} \}$

(ii) $M = \{ x \mid x \text{ adalah mahasiswa yang mengambil kuliah matematika diskrit} \}$

Atau bisa juga dituliskan

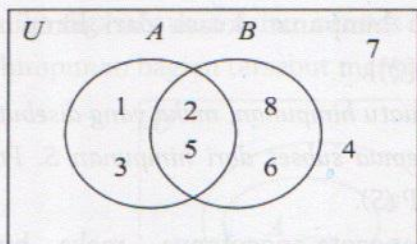
$M = \{ x \text{ adalah mahasiswa} \mid \text{ia mengambil kuliah matematika diskrit} \}$

d. Menggunakan Diagram Venn

Suatu himpunan dapat dinyatakan dengan cara menuliskan anggotanya dalam suatu gambar (diagram) yang dinamakan diagram venn. Diagram Venn menyajikan himpunan secara grafis dengan tiap-tiap himpunan digambarkan sebagai lingkaran dan memiliki himpunan semesta (U) yg digambarkan dng segi empat.

Misalkan $U = \{1, 2, \dots, 7, 8\}$, $A = \{1, 2, 3, 5\}$ dan $B = \{2, 5, 6, 8\}$.

Diagram Venn:



1.2.2 Kardinalitas dan Macam macam Himpunan

Jumlah unsur dalam suatu himpunan dinamakan kardinalitas dari himpunan tersebut. Untuk menyatakan kardinalitas himpunan A ditulis dengan notasi: $n(A)$ atau $|A|$. Contoh :

(i) $B = \{ x \mid x \text{ merupakan bilangan prima yang lebih kecil dari } 10 \}$, atau $B = \{ 2, 3, 5, 7 \}$ maka $|B| = 4$

(ii) $A = \{ a, \{ a \}, \{ \{ a \} \} \}$, maka $|A| = 3$

Jika ada sejumlah n elemen dalam himpunan S dimana n adalah nonnegative integer maka dikatakan bahwa S adalah himpunan terhingga dan n adalah kardinalitas dari S , dinotasikan dengan $|S|$.

Himpunan kuasa (power set) dari himpunan A merupakan suatu himpunan yang unsur-unsurnya merupakan semua himpunan bagian dari A , termasuk himpunan kosong dan himpunan A sendiri. Himpunan kuasa dinotasikan oleh $P(A)$. Jumlah anggota (kardinal) dari suatu himpunan kuasa bergantung pada kardinal himpunan asal. Misalkan, kardinalitas himpunan A adalah m , maka $|P(A)| = 2^m$.

Contoh: Jika $A = \{ x, y \}$, maka $P(A) = \{ \emptyset, \{ x \}, \{ y \}, \{ x, y \} \}$

Himpunan kuasa dari himpunan kosong adalah $P(\emptyset) = \{ \emptyset \}$, sementara itu himpunan kuasa dari himpunan $\{ \emptyset \}$ adalah $P(\{ \emptyset \}) = \{ \emptyset, \{ \emptyset \} \}$.

Jika S adalah suatu himpunan, maka yang disebut dengan power set adalah semua subset dari himpunan S . Power set dinotasikan sebagai $P(S)$.

Berdasarkan anggota-anggotanya, maka himpunan digolongkan sebagai berikut:

a. Himpunan Kosong

Jika suatu himpunan tidak mempunyai anggota, dengan kata lain dengan kardinalitas himpunan tersebut sama dengan nol maka himpunan tersebut dinamakan himpunan kosong (null set). Notasinya: $\emptyset$ atau $\{ \}$

Akan tetapi jika dijumpai $B = \{\{\}\}$ atau dapat juga ditulis sebagai $B = \{\emptyset\}$ maka B tidak disebut sebagai himpunan kosong karena ia memuat satu unsur yaitu himpunan kosong.

b. Himpunan Semesta

Himpunan semesta adalah himpunan yang anggotanya semua objek pembicaraan. Himpunan semesta dilambangkan dengan S atau U. Contoh:

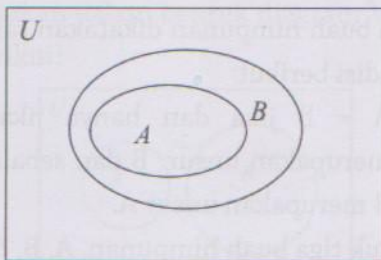
Jika $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ sebagai semesta pembicaraan dan $A = \{1, 3, 5\}$ maka dikatakan bahwa A merupakan himpunan bagian dari U.

c. Himpunan Bagian

Himpunan A dikatakan himpunan bagian (subset) dari himpunan B jika dan hanya jika setiap unsur A merupakan unsur dari B. Dalam hal ini, B dikatakan superset dari A.

Notasi himpunan bagian: $A \subseteq B$ atau $A \subset B$

Jika digambarkan dalam bentuk diagram Venn himpunan bagian tersebut menjadi:



Sebagai sebuah himpunan bagian, maka untuk setiap himpunan A berlaku hal-hal sebagai berikut:

- (a) A adalah himpunan bagian dari A itu sendiri (yaitu, $A \subseteq A$).

(b) Himpunan kosong merupakan himpunan bagian dari A ($\emptyset \subseteq A$).

(c) Jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq C$, maka $A \subseteq C$

$\emptyset \subseteq A$ dan $A \subseteq A$, maka $\emptyset$ dan A disebut himpunan bagian tak sebenarnya (improper subset) dari himpunan A . Pernyataan $A \subseteq B$ berbeda dengan $A \subset B$ karena notasi $A \subset B$ berarti A adalah himpunan bagian dari B tetapi $A \neq B$ sedangkan pernyataan $A \subseteq B$ digunakan untuk menyatakan bahwa A adalah himpunan bagian (subset) dari B yang memungkinkan $A = B$. Yang demikian dikatakan bahwa A merupakan himpunan bagian sebenarnya (proper subset) dari B .

Himpunan A disebut sebagai subset dari himpunan B jika dan hanya jika setiap elemen dari A juga merupakan elemen dari B . Kita menggunakan notasi $A \subseteq B$ untuk menunjukkan bahwa A adalah subset dari B .

d. Himpunan Ekuivalen

Dua buah himpunan dikatakan sama jika memenuhi kondisi berikut:

$A = B$ jika dan hanya jika setiap unsur A merupakan unsur B dan sebaliknya setiap unsur B merupakan unsur A .

Untuk tiga buah himpunan, A , B , dan C berlaku aksioma berikut:

(a) $A = A$, $B = B$, dan $C = C$

(b) Jika $A = B$, maka $B = A$

(c) Jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Dua buah himpunan dikatakan ekivalen jika masing-masing mempunyai kardinalitas yang sama. Misalkan, himpunan A adalah ekivalen dengan himpunan B berarti kardinal dari himpunan A dan himpunan B adalah sama, notasi yang digunakan adalah : $A \sim B$

Contoh:

Misalkan $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$ dan $B = \{ a, b, c, d \}$,
maka $A \sim B$ sebab $|A| = |B| = 4$

Dua himpunan dikatakan ekivalen jika dan hanya jika memiliki anggota himpunan yang sama.

e. Himpunan Disjoint

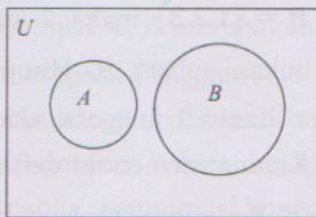
Dua himpunan A dan B dikatakan saling lepas (disjoint) jika keduanya tidak memiliki unsur yang sama. Notasi yang digunakan adalah $A // B$.

Misalnya $A = \{x / x = \text{bilangan bulat positif}\}$

$B = \{x / x = \text{bilangan bulat negatif}\}$

Maka A dan B merupakan dua himpunan yang saling lepas.

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah sebagai berikut:



Dua himpunan dikatakan saling lepas (disjoint) bila irisannya adalah himpunan kosong.

f. Himpunan berhingga dan himpunan tak berhingga (infinite).

Himpunan dikatakan berhingga jika ia mempunyai anggota-anggota yang banyaknya berhingga. Sedangkan himpunan dikatakan tak berhingga jika himpunan tersebut mempunyai anggota-anggota yang banyaknya tak berhingga. Contoh :

$H = \{x / x = \text{himpunan bilangan-bilangan bulat positif}\} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Maka H disebut himpunan tak berhingga.

$K = \{x, y, z\}$. Maka K disebut himpunan berhingga.

Himpunan yang tidak berhingga disebut himpunan infinit

1.3 Himpunan Bagian, Himpunan Kuasa dan Kesamaan Himpunan

Definisi 1.3.1. Sebuah himpunan A adalah subset dari himpunan B , ditulis $A \subseteq B$, jika setiap anggota A merupakan anggota B . Relasi $\subseteq$ disebut relasi inklusi.

Jadi, $A \subseteq B$ bilamana $x \in A$ termasuk $x \in B$. Perhatikan perbedaan antara $\subseteq$ dan $\in$

Jika $B = \{1, 2, 3\}$ maka 1 merupakan anggota B , tetapi 1 bukan subset B . Himpunan $A = \{1\}$ yang mempunyai hanya 1 anggota, akan tetapi, merupakan subset B . Karena memenuhi definisi : bilamana $x \in A$ maka $x \in B$. Perlu digarisbawahi bahwa hanya ada satu kemungkinan untuk x , seperti, $x = 1$. Hal ini penting untuk mengetahui perbedaan antara sebuah objek (yang bisa jadi dirinya sendiri) dan himpunan yang dibentuk dari objek-objek, contoh:

- 1 berbeda dari $\{1\}$
- $\{1\}$ berbeda dari $\{\{1\}\}$

Perhatikan bahwa keunikan anggota dari himpunan yang kedua adalah himpunan $\{1\}$

Ini dapat dipahami bahwa sebuah himpunan yang tidak terdapat anggota; himpunan ini disebut himpunan kosong, dan dilambangkan dengan simbol $\emptyset$. Hal tersebut dapat juga digambarkan sebagai sebuah sifat. Contoh:

$$\emptyset = \{x: x \neq x\}$$

Berikut ada beberapa sifat-sifat dasar dari relasi $\subseteq$:

Lemma 1.3.1. $\emptyset$ merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan.

Bukti. Berdasarkan definisi, $\emptyset$ adalah subset dari setiap himpunan A , jika setiap anggota $\emptyset$ juga merupakan anggota A . Karena $\emptyset$ tidak mempunyai anggota, secara trivialnya benar.

Lemma 1.3.2 Untuk sembarang himpunan A , $A \subseteq A$

Berdasarkan definisi $\subseteq$, A merupakan subset A , jika setiap anggota A merupakan anggota A .

Kapan dua himpunan akan dikatakan sama?. Sebuah definisi intuitif mengatakan bahwa dua himpunan akan dikatakan sama apabila mempunyai anggota yang sama. Kita akan menggunakan simbol $\subseteq$ untuk mendefinisikan kesamaan dari dua himpunan:

Definisi 1.3.3. Dua himpunan A dan B adalah sama, jika $A \subseteq B$ dan $B \subseteq A$, jika A dan B adalah sama, ditulis $A = B$.

Perhatikan bahwa definisi tersebut menunjukkan bahwa apa yang kita maksud (secara intuitif) dengan kesamaan himpunan: Jika setiap anggota A merupakan anggota B , dan jika setiap anggota B merupakan anggota A , maka kedua himpunan tersebut memiliki anggota yang sama. Untuk membuktikan bahwa dua himpunan A dan B adalah sama, harus ditunjukkan bahwa A merupakan subset dari B , dan B adalah subset dari A . Secara aturannya dapat diilustrasikan dengan:

Contoh 1.3.1

Diketahui $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = 1\}$, dan $B = \{1, -1\}$ akan ditunjukkan bahwa $A = B$:

" $A \subseteq B$ ": Diketahui $x \in A$; maka, berdasarkan definisi A , x adalah solusi persamaan $x^2 = 1$ sehingga $x = 1$ atau $x = -1$ akan sama halnya juga dengan kasus $x \in B$

" $B \subseteq A$ ": Diketahui $x \in B$ maka dengan definisi B , $x = 1$ atau $x = -1$. Pada kasus yang sama, x adalah bilangan positif dan penyelesaian x^2 , jadi ini menunjukkan definisi sifat-sifat A . Ini menunjukkan bahwa $x \in A$.

1.3.1 Latihan

Latihan 3. Tentukan himpunan kuasa dari $\{a, b, c, d\}$; berapa himpunan yang terjadi?

Latihan 4. Dengan menggunakan contoh dari himpunan kuasa diatas dan jawabanmu untuk soal diatas, hubungkan jawaban untuk soal berikut:

Diketahui bahwa sebuah himpunan A tidak memiliki anggota, dimana n adalah bilangan asli tetap, berapa banyak himpunan yang $\mathcal{B}(A)$ miliki? kamu tidak harus membuktikan jawabanmu, namun harus menjelaskan jawabanmu.

Latihan 5. Buktikan

Jika $A = B$ dan $B = C$, maka $A = C$

Buktikan lemma tersebut untuk dapat digeneralkan; sebuah contoh bukan merupakan bukti.

1.4 Himpunan Terhingga dan Tak Terhingga

Definisi 1.4.1. A himpunan M disebut terhingga, jika $M = \emptyset$, atau jika terdapat bilangan asli n sehingga anggota dari M dapat diurutkan $1, \dots, n$ dalam jalan seperti itu, setiap anggota M muncul tepat sekali urutan. Dilain pihak, M disebut tak terhingga.

Contoh 1.4.1

1. Himpunan $\{a, b, c, d\}$ adalah terhingga. Sejumlah bilangan yang mungkin sebagai berikut: 1 dipasangkan ke a , 2 dipasangkan ke b , 3 dipasangkan ke c , 4 dipasangkan ke d . Tentu saja terdapat kemungkinan lain dari daftar himpunan M
2. Himpunan dari semua penyelesaian persamaan $x^2 + 23x - 17 = 0$ adalah terhingga, karena jumlah penyelesaian dari polynomial adalah hampir sama dengan derajatnya.
3. Himpunan $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ adalah tak berhingga.

4. Himpunan dari semua kelipatan 5 adalah tak hingga.

Terkadang, tidak sepenuhnya jelas apakah sebuah himpunan terhingga dan tak terhingga. Bilangan asli n terdapat bilangan asli positif a, b, c sedemikian hingga $a^n + b^n = c^n$. Pertanyaan ini disebut *Fermat's last problem*. Jika $n = 2$, maka diperoleh persamaan pythagoras. Contoh: $a = 3, b = 4, c = 5$ merupakan sebuah penyelesaian. Hal tersebut ditunjukkan oleh A. Wiley bahwa 2 merupakan bilangan bulat untuk setiap bilangan yang muncul.

Masalah yang lain tentang *twins of primes*. Harus diingat bahwa, sebuah bilangan prima adalah bilangan asli yang lebih besar dari 1 yang hanya dapat dibagi 1 dan dirinya sendiri. Pasangan bilangan prima (p, q) disebut *a twin pair*, jika $p + 2 = q$. Contohnya. Urutan bilangan ganjil. Contoh dari twin pairs adalah $(5, 7)(11, 13)(59, 61)$. Ini tidak akan diperoleh apabila terdapat banyak pasangan bilangan prima yang tak terhingga.

Teorema berikut telah dikenal sejak masa Euclid (ca. 300 BC):

Teorema 1.4.1. Terdapat bilangan prima yang tak terhingga.

Bukti.

Berikut pembuktian Euclid, akan ditunjukkan bahwa untuk setiap bilangan prima p yang lebih dari 1. Andaikan bahwa p bilangan prima yang terbesar, dan misalkan $q = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \cdot p$. Maka $q + 1$ tidak dapat dibagi $2, 3, \dots, p$. Ini dapat disimpulkan bahwa q hanya dapat dibagi 1 dan dirinya sendiri. Hal ini menunjukkan bahwa q adalah

bilangan prima lebih dari p . Sebaliknya, terjadi kontradiksi bahwa p adalah bilangan prima terbesar, dan dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat bilangan prima terbesar. Dengan kata lain, himpunan bilangan prima adalah tak terhingga.

Latihan-latihan 1.4.1

Latihan 6.

1. Jelaskan kenapa $\mathbb{N}$ infinite.
2. Jelaskan kenapa $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ infinite

Latihan 7. Apakah himpunan berikut merupakan *finite* atau *infinite*?

1. $\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 2x - 1 = 0\}$
2. $\{x \in \mathbb{N} : x \leq 0\}$
3. $\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \leq 1\}$

1.5 Operasi Himpunan

Pada bagian ini, kita akan menunjukkan beberapa cara untuk menunjukkan himpunan dari beberapa yang telah diketahui sebelumnya.

Definisi 1.4.1 andaikan A dan B adalah himpunan diketahui; maka:

1. Irisan $A \cap B$ dari A dan B didefinisikan oleh

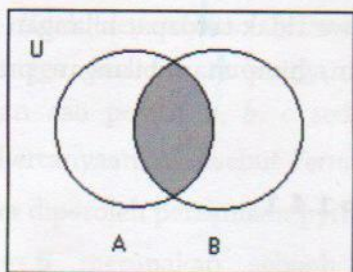
$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Jika $A \cap B = \emptyset$ maka A dan B disebut disjoint(saling lepas)

Misalkan A dan B adalah himpunan yang tidak saling lepas, maka

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah sebagai berikut :



Jika A dan B adalah himpunan maka irisan A dan B dinotasikan dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang berisi semua elemen yang ada pada keduanya.

Irisan dari sekumpulan himpunan adalah himpunan yang terdiri dari semua elemen yang merupakan anggota dari semua himpunan yang ada dalam kumpulan tersebut.

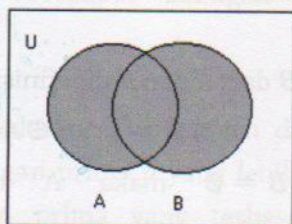
2. Gabungan $A \cup B$ dari A dan B didefinisikan oleh

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Misalkan A dan B adalah himpunan, maka

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Jika A dan B adalah himpunan maka union dari A dan B dinotasikan dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang berisi semua elemen yang ada pada A , B , maupun keduanya.

Gabungan dari sekumpulan himpunan adalah himpunan yang berisi semua elemen yang merupakan anggota dari sedikitnya satu himpunan dalam kumpulan tersebut.

3. Selisih himpunan $A \setminus B$ dari A dan B adalah himpunan

$$A \setminus B = \{x: x \in A \text{ dan } x \notin B\}$$

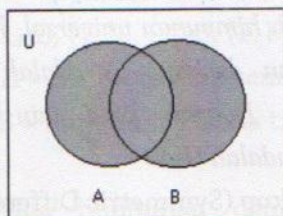
$A \setminus B$ juga disebut relative complement B terhadap A

Jika diketahui U adalah himpunan semesta, maka

$U \setminus A$ disebut komplemen A yang ditulis sebagai $-A$

Misalkan A dan B adalah himpunan, maka selisih A dan B dinotasikan oleh

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \notin B\} = A \cap B^c$$



Misalkan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{b, d, e, g, h\}$

$$A - B = \{a, c\}$$

$$B - A = \{g, h\}$$

Kesimpulan umumnya: $A - B \neq B - A$

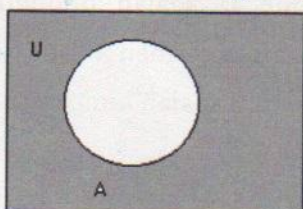
Jika A dan B adalah himpunan, maka beda A dan B dinotasikan dengan $A - B$ adalah himpunan yang berisi elemen yang ada di A tapi tidak ada di B. Beda tersebut diistilahkan sebagai komplemen B terhadap A.

4. Komplemen (complement)

Komplemen dari suatu himpunan merupakan unsur-unsur yang ada pada himpunan universal (semesta pembicaraan) kecuali anggota himpunan tersebut. Misalkan A merupakan himpunan yang berada pada semesta pembicaraan U , maka komplemen dari himpunan A dinotasikan oleh :

$$A^c = \{x \mid x \in U \text{ dan } x \notin A\}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Jika U adalah himpunan universal, komplemen himpunan A dinotasikan dengan A^c adalah komplemen dari A terhadap U . Dengan kata lain berlaku komplemen himpunan A adalah $U - A$

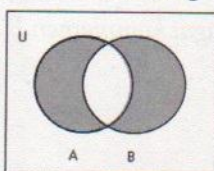
5. Beda Setangkup (Symmetric Difference)

Beda setangkup antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ' $\oplus$ '.

Misalkan A dan B adalah himpunan, maka beda setangkup antara A dan B dinotasikan oleh:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= (A \cup B) - (A \cap B) \\ &= (A - B) \cup (B - A) \end{aligned}$$

Jika dinyatakan dalam bentuk diagram Venn adalah:



Contoh:

Jika $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan $B = \{b, d, e, f, g, h\}$,
maka $A \oplus B = \{a, c, f, g, h\}$

Beda setangkup memenuhi sifat-sifat berikut:

(a) $A \oplus B = B \oplus A$ (hukum komutatif)

(b) $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$ (hukum asosiatif)

6. Perkalian Kartesian (cartesian product)

Perkalian kartesian antara dua buah himpunan dinotasikan oleh tanda ' $\times$ '.

Misalkan A dan B adalah himpunan, maka perkalian kartesian antara A dan B dinotasikan oleh:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ dan } b \in B\}$$

Contoh:

(i) Misalkan $C = \{1, 2, 3\}$, dan $D = \{a, b\}$, maka

$$C \times D = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$$

(ii) Misalkan $A = B =$ himpunan semua bilangan riil,
maka $A \times B =$ himpunan semua titik di bidang datar.

Misalkan ada dua himpunan dengan kardinalitas berhingga, maka kardinalitashimpunan hasil dari suatu perkalian kartesian antara dua himpunan tersebut adalah perkalian antara kardinalitas masing-masing himpunan. Dengan demikian, jika A dan B merupakan himpunan berhingga, maka:

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

Pasangan terurut (a, b) berbeda dengan (b, a) , dengan kata lain $(a, b) \neq (b, a)$. Dengan argumen ini berarti perkalian kartesian tidak komutatif, yaitu

$A \times B \neq B \times A$ dimana A atau B bukan himpunan kosong.

Jika $A = \emptyset$ atau $B = \emptyset$, maka $A \times B = B \times A = \emptyset$

Jika A dan B adalah himpunan, maka Cartesian Product dari A dan B yang dinotasikan dengan $A \times B$ merupakan himpunan dari semua pasangan terurut elemen A dan B .

Sehingga $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \cap b \in B\}$

Perhatikan bahwa $A \cap B$ adalah himpunan yang anggotanya terdapat pada A dan B , sedangkan $A \cup B$ adalah himpunan yang anggotanya terdapat pada A atau B atau pada keduanya; perhatikan bahwa “atau” tidak dapat diinterpretasi sebagai definisi eksklusif; secara terminologi “atau” selalu berarti “satu”, atau lainnya, atau keduanya.

Contoh 1.5.1.

1. Andaikan

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 4\} = \{-1, 0, 1, 2, 3\},$$

$$B = \left\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq \frac{x}{2} \leq 7\right\} = \{2, 3, 4, 5, 6\}$$

Maka,

$$A \cap B = \{x \in \mathbb{Z} : x \in A \text{ dan } x \in B\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 4 \text{ dan } 1 \leq \frac{x}{2} \leq 7\right\}$$

$$= \{2, 3\}$$

Selanjutnya,

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ or } x \in B\}$$

$$= \left\{x \in \mathbb{Z} : -1 \leq x \leq 4 \text{ or } 1 \leq \frac{x}{2} \leq 7\right\}$$

$$= \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

2. Andaikan g_1 dan g_2 dua garis tidak sejajar pada satu bidang. Maka, irisannya $g_1 \cap g_2$ adalah satu titik dimana dua garis tersebut berpotongan. Gabungannya $g_1 \cup g_2$ adalah himpunan semua titik pada garis g_1 atau g_2 (atau pada kedua garis)
3. Andaikan Rhimpunan semua mobil di Station Wagon di Iceland pada suatu waktu tertentu, dan andaikan S adalah himpunan semua mobil berwarna putih di Iceland. Maka $S \cap T$ adalah himpunan semua mobil Stasiun Wagon di Iceland, dan $S \cup T$ adalah himpunan semua mobil di Iceland baik yang di Stasiun Wagon atau yang berwarna putih atau keduanya.
4. Andaikan $U = \mathbb{N}$ dan $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ adalah bilangan prima}\}$. Maka, $-A$ adalah himpunan semua bilangan asli kurang dari 2 atau memiliki paling sedikit tiga pembagi.
5. Andaikan $U = \mathbb{N}$ dan A himpunan semua bilangan asli yang genap. Maka, $-A$ adalah himpunan bilangan asli yang ganjil

Sebuah gambar dapat ditunjukkan dari operasi-operasi yang terdefinisi di atas adalah diagram venn, yang ditunjukkan pada gambar 1.1 – 1.3. Daerah yang diarsir menunjukkan dari operasi-operasi tersebut.

Lemma 1.5.1. Andaikan $A \subseteq U$; maka

1. $A \cap A = A, A \cup A = A$
2. $A \cap \emptyset = \emptyset, A \cup \emptyset = A$

$$3. A \cap U = A, A \cup U = U$$

$$4. A \cap -A = \emptyset, A \cup -A = U$$

Pembuktian.

Pembuktian hanya untuk 1 dan 2, yang lainnya sebagai latihan

$$1. A \cap A = \{x \in U : x \in A \text{ dan } x \in A\} = \{x \in U : x \in A\} = A$$

$$\{A \cup A\} = \{x : x \in A \text{ atau } x \in A\} = \{x : x \in A\} = A$$

$$2. A \cap \emptyset = \{x : x \in A \text{ dan } x \in \emptyset\}; \text{ karena } \emptyset \text{ tidak memiliki}$$

anggota, kita tidak menambahkan apapun untuk A , sehingga, $A \cup \emptyset = A$

Lemma 1.5.2. Jika A dan B adalah himpunan, maka $A \cap B = B \cap A$, dan $A \cup B = B \cup A$. Hukum ini disebut hukum komutatif untuk $\cap$ dan $\cup$

Pembuktian.

Kita akan membuktikan bagian yang pertama. Untuk bagian yang kedua akan sama

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B\} = \{x : x \in B \text{ dan } x \in A\} = B \cap A$$

Karena kita mendefinisikan operasi $\cap$ dan $\cup$ hanya untuk dua himpunan, bentuk $A \cap B \cap C$ dan $A \cup B \cup C$ tidak termasuk. Namun, jika kita tulis $(A \cap B) \cap C$ dan $(A \cup B) \cup C$, maka ini menginstruksikan kita untuk menemukan terlebih dahulu irisan dari A dan B , dan kemudian irisan dari $A \cap B$ dengan C . Sebaliknya, kita dapat menginterpretasikan garis $A \cap (B \cap C)$ dan $A \cup (B \cup C)$, yang mengarahkan kita untuk menemukan terlebih dahulu irisan dari B dan C , dan kemudian memprosesnya ke A . Lemma berikut

menunjukkan bahwa langkah apapun yang kita lakukan pertama hasilnya akan sama.

Lemma 1.5.3. Jika A, B, C adalah himpunan, maka

1. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

2. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Ini disebut hukum asosiatif untuk $\cap$ dan $\cup$

Pembuktian

Jika $x \in (A \cap B) \cap C$, maka $x \in A \cap (B \cap C)$ dan sebaliknya. " $\subseteq$ ": andaikan $x \in (A \cap B) \cap C$; maka, $x \in A \cap B$ dan $x \in C$; karena x merupakan anggota dari $A \cap B$, ini berarti $x \in A$ dan $x \in B$. Jadi, $x \in A$ dan $x \in B$ dan $x \in C$ yang mengimplikasikan $x \in A \cap (B \cap C)$

Pembuktian untuk inklusi yang lain sebagai latihan.

Lemma 1.5.4 memberikan sebuah interpretasi yang berarti untuk bentuk $A \cap B \cap C$ atau $A \cup B \cup C$. Contohnya $A \cup B \cup C = \{x : x \in A \text{ atau } x \in B \text{ atau } x \in C\}$, dan kita menghapus kurung yang membingungkan. Hukum asosiatif berlaku untuk mengelompokkan tiga atau lebih himpunan.

1.6 Hukum De Morgan, Distribusi, Tabel

Andaikan U merupakan himpunan semesta, dimana semua himpunan yang disebut adalah subset. Teorema yang pertama menunjukkan hubungan antara irisan, gabungan dan komplemen.

Teorema 1.6.1. Untuk semua himpunan A, B
 $-(A \cup B) = -A \cap -B, -(A \cap B) = -A \cup -B$ Hukum
 De Morgan

Pembuktian.

" $\subseteq$ " Andaikan $x \in -(A \cup B)$; maka x bukan merupakan gabungan dari A dan B , sehingga, x tidak terdapat dalam A maupun B . Karena x tidak terdapat pada A , maka $x \in -A$, dan karena x tidak terdapat pada B , maka $x \in -B$. Jadi, $x \in -A$ dan $x \in -B$ yang mengimplikasikan $x \in -A \cap -B$

Sebaliknya " $\supseteq$ ": Andaikan $x \in -A \cap -B$; maka x tidak terdapat pada A dan x tidak terdapat pada B . Sehingga, x bukan merupakan anggota dari A atau B .

Contohnya $x \in -(A \cup B)$

Meskipun bukti-bukti dari persamaan himpunan tersebut sederhana, persamaan himpunan tersebut dapat menjadi lebih membosankan dan kita akan memperkenalkan alat baru untuk menyelesaikan masalah berikut.

Jika A dan B merupakan himpunan, maka untuk sebarang anggota x dari semesta U akan terdapat empat kemungkinan:

$x \in A$ dan $x \in B, x \in A$ dan $x \notin B, x \notin A$ dan $x \in B, x \notin A$ dan $x \notin B$

Untuk setiap kasus-kasus di atas, andaikan jika x terdapat pada irisan A dan B ; Jika $x \in A$ dan $x \in B$, maka $x \in A \cap B$. Dari tiga kasus lain, $x \notin A \cap B$. Bentuk tersebut dapat disajikan kedalam tabel berikut:

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	0	0

Disini, 1 berarti bahwa x terdapat pada himpunan yang ditunjukkan pada kolom atas, dan 0 menunjukkan tidak terdapat himpunan.

Dalam kasus, komplemen, perhatikan tabel berikut:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Dengan tiga tabel tersebut, kita dapat menemukan tabel untuk setiap himpunan yang dibentuk dari A dan B dengan operasi $\cap$, $\cup$, dan $\neg$. Perhatikan tabel untuk hukum De Morgan:

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \cup B$	$\neg(A \cup B)$	$\neg A \cap \neg B$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	1	0	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1

Perhatikan dua kolom yang kanan tabel memiliki entri yang sama. Ini menunjukkan bahwa dua himpunan tersebut adalah sama.

Teorema 1.6.2. Untuk setiap himpunan A, B

$$A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$$

Ini merupakan hukum serapan

Pembuktian;

Kita hanya akan membuktikan persamaan yang pertama, dan menggunakan tabel:

A	B	$A \cap B$	$A \cup (A \cap B)$
1	1	1	1
1	0	0	1
0	1	0	0
0	0	0	0

Metode tabel dapat juga digunakan lebih dari dua himpunan; maka kemungkinan yang terjadi juga bertambah. Contohnya, jika terdapat himpunan A, B, C , maka terdapat delapan kemungkinan untuk sebarang $x \in U$, dan jika A, B, C, D maka terdapat 16 kemungkinan. Secara umum, jika terdapat n himpunan, maka kolom dalam tabel untuk setiap n himpunan tersebut akan memiliki 2^n entri.

Teorema akhir pada bagian ini menunjukkan hubungan yang saling mempengaruhi antara $\cap$ dan $\cup$.

Teorema 1.6.3. Untuk semua himpunan A, B, C

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

Ini merupakan hukum distributif untuk $\cap$ dan $\cup$

Pembuktian. (Latihan)

1.6.1 Latihan

Latihan 8. Dengan menggunakan metode tabel, buktikan:

1. Hukum De Morgan yang kedua
2. Hukum Absorption yang kedua
3. Hukum distributif yang pertama

BAB 2



RELASI

2.1 Pasangan Terurut, Produk Cartesius

Sebagaimana dinyatakan sebelumnya, jika sebuah himpunan A diketahui secara eksplisit, ini tidak penting bagaimana urutan anggota dari A yang di tuliskan. Contohnya. Himpunan $\{x, y\}$ adalah sama dengan himpunan $\{y, x\}$. Dalam banyak contoh, akan tetapi, satu memerlukan beberapa urutan dari anggota yang ada.

Sebagai contoh, perhatikan sumbu koordinat padasumbu x dan sumbu y maka dapat di ketahui setiap titik pada sumbu koordinat $\langle x, y \rangle$. Untuk menemukan titik $\langle a, b \rangle$, hal yang harus dilakukan hanya menggeser sumbu xa satuan kearah kanan atau kekiri dari posisi asalnya (tergantung pada tanda dari posisi a positif atau negatif), selanjutnya, geser sejauh b satuan ke atas atau ke bawah. Jika a dan b berbeda, maka $\langle a, b \rangle$ dan $\langle b, a \rangle$ merupakan titik yang berbeda. Jadi, pada contoh ini urutan anggota yang tampak adalah relevan. Sebagaimana beberapa hal berikut.

Definisi 2.1.1 andaikan A adalah sebuah himpunan

1. A disebut *singleton* jika $A = \{x\}$ untuk beberapa x .
Contohnya. Jika A memiliki tepat satu anggota.

2. A disebut *Unordered pair*, jika $A = \{x, y\}$ untuk beberapa x, y , jika A memiliki tepat dua anggota
3. A disebut *ordered pair*, jika $A = \{\{x\}\{x, y\}\}$ untuk beberapa x, y

Secara singkatnya, bentuknya menjadi:

$$\langle x, y \rangle = \{\{x\}\{x, y\}\}$$

Sifat yang menentukan *ordered pair* (pasangan terurut) adalah dua pasangan berurutan adalah sama jika masing-masing urutan adalah sama. Teorema berikut menakutkan kita bahwa pasangan berurutan yang telah didefinisikan memiliki sifat berikut:

Teorema 2.1.1 Andaikan $\langle a, b \rangle$ dan $\langle c, d \rangle$ adalah pasangan terurut. Maka $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$ jika dan hanya jika $a = c$ dan $b = d$

Catatan: Bentuk "jika dan hanya jika" memiliki arti bahwa:

1. Jika $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$, maka $a = c$ dan $b = d$,
2. Jika $a = c$ dan $b = d$ maka $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$. Ini merupakan kebalikan dari 1.

Jadi, pembuktian telah dilakukan secara dua arah, yaitu 1 dan 2.

Pembuktian." $\Rightarrow$ ": andaikan $\langle a, b \rangle = \langle c, d \rangle$; maka berdasarkan definisi:

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

$$\langle c, d \rangle = \{\{c\}\{c, d\}\}$$

Dan karena keduanya adalah sama menurut hipotesis kita, maka:

$$\{\{a\}\{a,b\}\} = \{\{c\}\{c,d\}\},$$

Perhatikan dua kasus berikut

1. $a = b$: maka,

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}\{a,b\}\} = \{\{a\}\} = \{\{c\}\{a,d\}\}$$

Sehingga $\{a\} = \{c\}$ yang menunjukkan $a = c$.

Selanjutnya, $\{a\} = \{c,d\} = \{a,d\}$ yang menunjukkan $d = a = b$. Jadi, untuk kasus ini dapat ditunjukkan bahwa $a = c$ dan $b = d$

2. $a \neq b$: maka, $\{a,b\} = \{c,d\}$. Berdasarkan hipotesis, kita memiliki $\{a\} = \{c\}$, karena kedua himpunan memiliki hanya satu anggota; ini menunjukkan $a = c$

Selanjutnya, $\{a,b\} = \{c,d\}$, karena $\{a,b\}$ memiliki dua anggota. Dapat ditunjukkan bahwa $a = c$. Jadi, $\{a,b\} = \{c,b\} = \{c,d\}$. Ini menunjukkan $b = d$.

" $\Leftarrow$ " sebaliknya andaikan $a = c$ dan $b = d$; maka $\{a\} = \{c\}$ dan $\{a,b\} = \{c,d\}$, sehingga

$$\langle a, b \rangle = \{\{a\}, \{a,b\}\} = \{\{c\}\{c,d\}\} = \langle c, d \rangle$$

Definisi 2.1.2 Cartesius (atau cross) produk $A \times B$ dari dua himpunan di definisikan sebagai

$$A \times B = \{\langle a, b \rangle : a \in A, b \in B\}$$

Jadi, operasi $\times$ memasangkan anggota dari A dengan anggota dari B sedemikian hingga anggota A muncul sebagai komponen pertama, dan anggota B muncul sebagai urutan

kedua. Ada kemungkinan untuk mendefinisikan product cartesius untuk lebih dari dua faktor, namun, kita tidak mengerjakannya pada tahap ini.

Contoh 2.1.1.

1. Andaikan $A = \{1, 2, 3\}$ dan $B = \{a, b\}$; maka $A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}$
2. Andaikan $A = \mathbb{R}$ dan $B = \mathbb{R}$; maka $A \times B = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ adalah himpunan titik-titik koordinat pada bidang cartesius.
3. Andaikan $A = B = \{x \in \mathbb{R} : -1 < x < 1\}$; maka $A \times B$ adalah himpunan titik-titik pada sumbu koordinat yang terletak pada sebuah persegi yang panjang sisi 2 yang berpusat pada titik asal

2.1.1 Latihan

Latihan 9. Andaikan $A = \{2, 4, 6\}$ dan $B = \{4, 8, 12\}$; tentukan $A \times B$ dan $B \times A$

Latihan 10. Apakah mungkin jika $A \times B = B \times A$? Jelaskan !

Latihan 11. Jika A memiliki n anggota dan B memiliki m anggota, berapa banyak anggota $A \times B$? Jelaskan!

2.2 Pendahuluan Relasi

Terkadang, tidak penting untuk memandang produk cartesius secara utuh dari dua himpunan A dan B , akan tetapi lebih baik pada subset dari produk cartesius. Hal ini dijelaskan dengan definisi berikut:

Definisi 2.2.1 untuk sebarang $A \times A$ disebut relasi antara A dan B

Untuk sebarang subset $A \times A$ disebut relasi pada A

Dengan kata lain, jika A adalah himpunan, untuk setiap himpunan dari pasangan terurut dengan urutan pada A adalah relasi pada A . Karena relasi R pada A merupakan subset dari $A \times A$, ini merupakan anggota dari himpunan kuasa dari $A \times A$. Contohnya $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(A \times A)$. Jika R adalah relasi pada A dan $\langle x, y \rangle \in R$, maka ditulis xR_y , baca " x adalah pada R relasi y ", atau x adalah relasi pada y , jika R diketahui.

Contoh 2.2.1

1. Andaikan $A = \{2, 4, 6, 8\}$ dan terdefinisi pada relasi R pada A oleh $\langle x, y \rangle \in R$ jika dan hanya jika x membagi y . Maka,

$$R = \{\langle 2, 2 \rangle, \langle 2, 4 \rangle, \langle 2, 6 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \langle 4, 4 \rangle, \langle 4, 8 \rangle, \langle 6, 6 \rangle, \langle 8, 8 \rangle\}$$

Perhatikan bahwa tiap bilangan merupakan pembagi bilangan itu sendiri

2. Andaikan $A = \mathbb{N}$, dan definisi $R \subseteq A \times A$ oleh xR_y jika dan hanya jika x dan y memiliki hasil yang sama ketika dibagi 3.

Karena A merupakan infinite, maka tidak dapat disebutkan semua anggota dari R secara eksplisit; tetapi sebagai contoh

$$\langle 1, 4 \rangle, \langle 1, 7 \rangle, \langle 1, 10 \rangle, \dots, \langle 2, 5 \rangle, \langle 2, 8 \rangle, \dots, \langle 0, 0 \rangle, \langle 1, 1 \rangle, \dots \in R$$

Perhatikan bahwa xR_x untuk $x \in \mathbb{N}$ dan bilamana xR_y maka yR_x

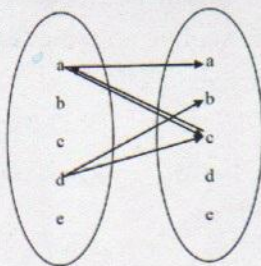
3. Andaikan $A = \mathbb{R}$ dan terdefinisi relasi R pada $\mathbb{R}$ oleh xR_y jika dan hanya jika $y = x^2$ maka R terdapat titik-titik pada parabola $y = x^2$
4. Andaikan $A = \mathbb{R}$ dan terdefinisi R pada $\mathbb{R}$ oleh xR_y jika dan hanya jika $x \cdot y = 1$. Maka terdapat R semua pasangan $\langle x, \frac{1}{x} \rangle$ dimana x adalah bilangan real kecuali 0.
5. Andaikan $A = \{1, 2, 3\}$ dan terdefinisi R pada A oleh xR_y jika dan hanya jika $x + y = 7$. Karena jumlah dua anggota A mendekati 6, maka xR_y tidak untuk dua anggota A ; sehingga $R = \emptyset$

Untuk menunjukkan himpunan yang anggot sedikit, kita dapat menggunakan gambar dari sebuah relasi R pada A : sketsa kedua himpunan A dan, jika xR_y , maka gambarkan sebuah digram panah dari x pada sisi kiri sketsa ke y pada sisi kanan sketsa.

Andaikan $A = \{a, b, c, d, e\}$ dan perhatikan relasi
 (2.1) $R = \{\langle a, a \rangle \langle a, c \rangle \langle c, a \rangle \langle d, b \rangle \langle d, c \rangle\}$

Diagram panah dari R ditunjukkan pada gambar 2.1

Gambar 2.1 : Diagram Panah



Berdasarkan diagram panah diatas, di tunjukkan bahwa e tidak muncul pada anggota R , contohnya b bukan urutan pertama pada setiap pasangan di R . Untuk menamai himpunan-himpunan anggota dari A yang termasuk dalam R , perhatikan:

Definisi 2.2.2 Andaikan R adalah relasi pada A . Maka,

$$\text{dom } R = \{x \in A : \text{terdapat } x \in A \text{ sedemikian hingga } \langle x, y \rangle \in R\}$$

$\text{dom } R$ disebut domain R .

$$\text{ran } R = \{y \in A : \text{terdapat } x \in A \text{ sedemikian hingga } \langle x, y \rangle \in R\}$$

ran disebut range R

$\text{fld } R = \text{dom } R \cup \text{ran } R$ disebut *field* R . Perhatikan bahwa $\text{dom } R$, $\text{ran } R$, dan $\text{fld } R$ adalah semua subset A .

Contoh 2.2.2

1. Andaikan A dan R terdapat dalam (2.1); maka

$$\text{dom } R = \{a, c, d\}, \text{ran } R = \{a, b, c, d\}, \text{fld } R = \{a, b, c, d\}$$

2. Andaikan $A = \mathbb{R}$ dan terdefinisi R oleh xRy , jika dan hanya jika $y = x^2$; maka

$$\text{dom } R = \mathbb{R}, \text{ran } R = \{y \in \mathbb{R} : y > 0\}, \text{fld } R = \mathbb{R}$$

3. Andaikan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan terdefinisi R oleh xRy , jika dan hanya jika $x < y$ dan x membagi y ;

$$R = \{(1, 2), (1, 3), \dots, (1, 6), (2, 4), (2, 6), (3, 6)\}$$

dan

$$\text{dom } R = \{1, 2, 3\}, \text{ran } R = \{2, 3, 4, 5, 6\}, \text{fld } R = A$$

4. Andaikan $A = \mathbb{R}$ dan R didefinisikan sebagai $\langle x, y \rangle \in R$ jika dan hanya jika $x^2 + y^2 = 1$. Maka $\langle x, y \rangle \in R$ jika dan hanya jika $\langle x, y \rangle$ terdapat pada lingkaran yang berpusat pada titik asal. Jadi,

$$\text{dom } R = \text{ran } R = \text{fld } \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{R} : -1 < z < 1\}$$

Definisi 2.2.3 Andaikan R relasi pada A ; maka $R = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$ merupakan konvers R

Kita mendapatkan konvers R dari $\check{R}$ jika we merubah semua pasangan terurut R ; jika terdapat diagram yang menunjukkan R , ini berarti semua tanda panah dibalik.

Definisi 2.2.4 Andaikan R dan S relasi pada A ; maka $R \circ S = \{\langle x, z \rangle : \text{terdapat } y \in A \text{ sedemikian hingga } xR_y \text{ dan } yS_z\}$.

Operasi $\circ$ disebut komposisi atau relatif produk R dan S .

Contoh 2.2.3

1. Misalkan terdapat diagram panah relasi R dan S . Relasi $R \circ S$ merupakan himpunan semua pasangan $\langle x, z \rangle$ sedemikian hingga x terdapat pada diagram kiri dari A , z terdapat pada kanan dan terdapat panah dari x ke z melalui anggota yang terdapat pada diagram A .
2. Andaikan $A = \mathbb{N}$ dan R didefinisi oleh xR_y jika dan hanya jika $x + 1 = y$, S didefinisi oleh yS_z jika dan hanya jika $z = 2y$. Maka $\langle x, z \rangle \in R \circ S$ jika dan hanya jika $z = 2(x + 1)$:

$$\langle x, z \rangle \in R \circ S \Leftrightarrow \text{terdapat } y \in A \text{ dengan } xR_y S_z$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 \text{ dan } z = 2y$$

$$\Leftrightarrow z = 2(x + 1)$$

3. Andaikan R sebarang relasi pada A ; maka

$$R \circ \check{R} =$$

$$\{\langle x, z \rangle : x, z \in \text{dom } R \text{ dan terdapat } y \in \text{ran } R \text{ dengan } xR_y \text{ dan } zR_y\}$$

:

$$\text{dom } R = \text{ran } R = \text{fld } \mathbb{R} = \{z \in \mathbb{R} : -1 < z < 1\}$$

Definisi 2.2.3 Andaikan R relasi pada A ; maka $R = \{\langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R\}$ merupakan konvers R

Kita mendapatkan konvers R dari $\check{R}$ jika we merubah semua pasangan terurut R ; jika terdapat diagram yang menunjukkan R , ini berarti semua tanda panah dibalik.

Definisi 2.2.4 Andaikan R dan S relasi pada A ; maka $R \circ S = \{\langle x, z \rangle : \text{terdapat } y \in A \text{ sedemikian hingga } xR_y \text{ dan } yS_z\}$.

Operasi $\circ$ disebut komposisi atau relatif produk R dan S .

Contoh 2.2.3

1. Misalkan terdapat diagram panah relasi R dan S . Relasi $R \circ S$ merupakan himpunan semua pasangan $\langle x, z \rangle$ sedemikian hingga x terdapat pada diagram kiri dari A , z terdapat pada kanan dan terdapat panah dari x ke z melalui anggota yang terdapat pada diagram A .
2. Andaikan $A = \mathbb{N}$ dan R didefinisi oleh xR_y jika dan hanya jika $x + 1 = y$, S didefinisi oleh yS_z jika dan hanya jika $z = 2y$. Maka $\langle x, z \rangle \in R \circ S$ jika dan hanya jika $z = 2(x + 1)$:

$$\langle x, z \rangle \in R \circ S \Leftrightarrow \text{terdapat } y \in A \text{ dengan } xR_y S_z$$

$$\Leftrightarrow y = x + 1 \text{ dan } z = 2y$$

$$\Leftrightarrow z = 2(x + 1)$$

3. Andaikan R sebarang relasi pada A ; maka

$$R \circ \check{R} =$$

$$\{\langle x, z \rangle : x, z \in \text{dom } R \text{ dan terdapat } y \in \text{ran } R \text{ dengan } xR_y \text{ dan } zR_y\}$$

Note: kedua ruas dari = memiliki himpunan, maka akan ditunjukkan bahwa kedua himpunan adalah sama.

Pembuktian " $\subseteq$ ":

Andaikan $\langle x, z \rangle \in R \circ R^{\sim}$; maka terdapat beberapa $y \in A$ sedemikian hingga $xR_y \check{R} z$. Contoh: $\langle x, y \rangle \in R$ dan $\langle y, z \rangle \in R^{\sim}$. Karena $\langle x, y \rangle \in R$, maka $x \in \text{dom } R$ dan karena $\langle y, z \rangle \in R^{\sim}$, maka $\langle z, y \rangle \in R$; sehingga $z \in \text{dom } R$. Selanjutnya $y \in \text{ran } R$ sebagaimana xR_y dan zR_y

" $\supseteq$ " : Andaikan $\langle x, y \rangle \in R$ dan $\langle z, y \rangle \in R$; maka $\langle y, z \rangle \in R^{\sim}$ dan $xR_y \check{R} z$. contoh: $\langle x, y \rangle \in R$ dan $\langle y, z \rangle \in R^{\sim}$

Perhatikan bahwa $\langle x, z \rangle \in R \circ R^{\sim}$ jika dan hanya jika terdapat tanda panah dari x dan z memasang anggota y yang sama pada A

2.2.1 Latihan-latihan

Latihan 12. Untuk relasi (2.1), tentukan $\check{R}$, $R \circ R$ dan $R \circ R^{\sim}$

Latihan 13. Identitas atau relasi diagonal pada A di definisikan oleh

$$(2.2) \quad \varpi = \{\langle x, x \rangle : x \in A\}$$

Tunjukkan: untuk sembarang relasi R pada A $AR \circ \varpi = R$ dan $\varpi \circ R = R$

2.3 Relasi Order

Andaikan $A = \mathbb{N}$ dan R adalah relasi yang didefinisikan oleh $\langle x, y \rangle \in R$ jika dan hanya jika $x \leq y$; ingat bahwa $\leq$ (atau R) memiliki sifat-sifat untuk setiap $x, y, z \in \mathbb{N}$

1. $x \leq x$
2. Jika $x \leq y$ dan $y \leq x$ maka $x = y$
3. Jika $x \leq y$ dan $y \leq z$ maka $x \leq z$
4. $x \leq y$ atau $y \leq x$ contoh. Setiap 2 anggota $\mathbb{N}$ adalah sebanding dengan $\leq$

Definisi 2.3.1 Misalkan R relasi pada A

1. R adalah refleksi $\langle x, x \rangle \in R$ untuk setiap $x \in A$ jika
2. R adalah anti simentris jika $x, y \in R$ dan $\langle y, x \rangle \in R$ maka $x = y$
3. R adalah transitif $x, y, z \in A$ $\langle x, y \rangle \in R$ dan $\langle y, z \rangle \in R$ jika maka $\langle x, z \rangle \in R$
4. R adalah parsial order pada A jika R refleksi, anti simetris dan transitif.
5. R adalah linier order pada A jika R adalah parsial order, dan xR_y atau yR_x untuk setiap $x, y \in A$.

Contoh: jika setiap dua anggota A adalah *comparable* dengan R

Jika R adalah parsial order pada A , maka ditulis $\leq$ untuk R . Contoh. $x \leq y$ jika dan hanya jika xR_y . Jika $\leq$ adalah parsial order pada A , maka pasangan $(A, \leq)$ disebut

himpunan order parsial atau himpunan order . Jika $\leq$ adalah linier order, maka $\langle A, \leq \rangle$ disebut himpunan linier order atau chain.

Untuk himpunan parsial order berhingga $\langle A, \leq \rangle$ dapat digambarkan diagram order dengan aturan berikut: Jika $a \leq b$ dan $a \neq b$ maka letak b sesudah a . b tidak harus terkait langsung dengan a , namun juga dapat bergeser pada satu sisi a atau lainnya. jika tidak terdapat anggota antara a dan b , a dan b dapat di hubungkan dengan garis.

Contoh 2.3.1

1. Misal $A = \{0, 1, a, b, c\}$ dan didefinisikan $<$ oleh diagram pada gambar 2.2

Gambar 2.2 : The Diamond

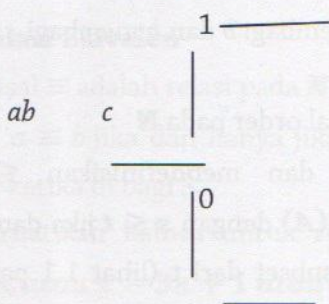


Diagram di atas menggambarkan relasi pada A berikut:

$$0 \leq 0, 0 \leq a, 0 \leq b, 0 \leq c, 0 \leq 1, a \leq a, a \leq 1, b \leq b, b \leq 1, c \leq c, c \leq 1, 1 \leq 1$$

2. Misal $A = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ dan R terdefinisi sebagai relasi $\leq$ pada $\mathbb{N}$, contoh aRb jika dan hanya jika $a \leq b$. Maka R adalah urut linier pada A .

3. Kita dapat mendefinisikan definisi relasi yang lain pada $\mathbb{N}$ dengan:

(2.3)

a/b jika dan hanya jika a membagi b

Untuk menunjukkan hal tersebut merupakan order parsial, dapat ditunjukkan dengan mendefinisikan tiga sifat dari parsial order berikut:

Refleksi : karena setiap bilangan asli merupakan pembagi dirinya sendiri, *a/a untuk setiap $a \in A$*

Antisimetris: Jika a membagi b maka *$a = b$ atau $a \leq b$* dalam urutan biasa dari $\mathbb{N}$; demikian juga jika b membagi a , maka *$b = a$ atau $b < a$* . Karena *$a < b$ dan $b < a$* tidak mungkin *a/b dan b/a* maka *$a = b$*

Transitif : Jika a membagi b dan b membagi c maka a juga membagi c

Jadi, $/$ adalah parsial order pada $\mathbb{N}$

4. Misal $A = \{x, y\}$ dan mendefinisikan $\leq$ pada himpunan kuasa $\mathcal{B}(A)$ dengan *$s \leq t$ jika dan hanya jika s merupakan subset dari t* (lihat 1.1 pada hal. 11). Berikut merupakan relasi:

$$\emptyset \leq \emptyset, \emptyset \leq \{x\}, \emptyset \leq \{y\}, \emptyset \leq \{x, y\} = A, \{x\} \leq \{x\}, \{x\} \leq \{x, y\}, \{y\} \leq \{y\},$$

$$\{y\} \leq \{x, y\}, \{x, y\} \leq \{x, y\}$$

Latihan-latihan

Latihan 14.

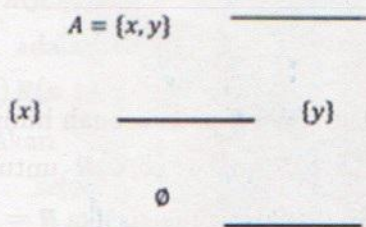
Misal $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ dan mendefinisikan relasi $\#$ pada A oleh *$x \# y$ jika dan hanya jika x adalah kelipatan y* .

Tunjukkan bahwa $\#$ merupakan parsial order pada A dan gambarkan diagramnya.

Latihan 15.

Apa hubungan antara $\#$ dan $/$, berdasarkan definisi (2.3), pada $A = \{0, 1, \dots, 10\}$? Seperti apa bentuk diagramnya?

Gambar 2.3: 4 anggota himpunan kuasa



2.4 Relasi Ekuivalen

Misal $\equiv$ adalah relasi pada $\mathbb{N}$ yang didefinisikan oleh

$a \equiv b$ jika dan hanya jika memiliki sisa pembagian ketika di bagi 3

Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in \mathbb{N}$ dapat ditulis $x = 3n$, atau $x = 3n + 1$ atau

$x = 3n + 2$ tergantung pada sisa pembagian ketika x dibagi 3. Secara jelasnya, relasi $\equiv$ adalah refleksi; dan juga transitif;

Misal $a \equiv b$ dan $b \equiv c$, terdapat $k, n, m \in \mathbb{N}$, dan $r, s, t < 2$ sedemikian hingga $a = 3k + r$, $b = 3n + s$, $c = 3m + t$. Karena $a \equiv b$, maka $r = s$ dan karena $b \equiv c$ maka $s = t$ jadi,

$r = s = t$ dan tampak bahwa $a = 3k + r, c = 3m + r$.
 Sehingga $a \equiv c$ jadi, $\equiv$ adalah transitif.

Namun, $\equiv$ bukan anti simetris; ambil contoh $a = 4$ dan $b = 7$; maka $4 \equiv 7$ dan $7 \equiv 4$. Karena keduanya memiliki sisa pembagi 1 ketika dibagi 3. Tetapi contoh ini mengindikasikan bahwa $\equiv$ mempunyai sifat : jika $a \equiv b$ maka $b \equiv a$ untuk sembarang $a, b \in \mathbb{N}$. Banyak relasi yang penting memiliki sifat ini. Yakni refleksi dan transitif.

Definisi 2.4.1 A relasi R pada sebuah himpunan A disebut simetris jika $\langle a, b \rangle R$ maka $\langle b, a \rangle R$ untuk setiap $a, b \in A$; dengan kata lain R adalah simetris jika $R = R^{-1}$

R disebut relasi ekuivalen jika R adalah refleksi, transitif dan simetris

Contoh 2.4.1 berikut merupakan semua relasi ekuivalen:

1. Misal A himpunan semua persegi dan mendefinisikan relasi R oleh aRb jika a dan b mempunyai luas yang sama,
2. Misal A himpunan semua garis lurus pada bidang dan mendefinisikan R oleh gRh jika $g \parallel h$ atau g dan h adalah paralel.
3. Misal A himpunan semua mobil di Iceland dan mendefinisikan R oleh cRd jika c memiliki warna yang sama.
4. Misal $A = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Contoh himpunan semua pasangan (n, m) dimana n dan m adalah bilangan asli.

Mendefinisikan relasi R pada A dengan $\langle n, m \rangle R \langle s, t \rangle$ jika $n \cdot t = m \cdot s$. Kita akan menunjukkan bahwa R merupakan relasi ekuivalen. Contoh. kita buktikan bahwa R mempunyai tiga definisi sifat-sifat sebuah ekuivalen:

- a. Tunjukkan bahwa R adalah refleksi, contoh.

$\langle n, m \rangle$ untuk setiap $n, m \in \mathbb{N}$

- b. R adalah transitif, contoh:

$\langle n, m \rangle R \langle p, q \rangle$ dan $\langle p, q \rangle R \langle s, t \rangle$ maka $\langle n, m \rangle R \langle s, t \rangle$

- c. R adalah simetris, contoh jika

$\langle n, m \rangle R \langle s, t \rangle$ maka $\langle s, t \rangle R \langle n, m \rangle$

Hanya akan dibuktikan 4a, selebihnya akan dijadikan sebagai latihan. Misal $\langle n, m \rangle \in A$. Berdasarkan definisi dari R diketahui bahwa $\langle n, m \rangle R \langle n, m \rangle$ jika dan hanya jika $n \cdot m = n \cdot m$; persamaan tersebut adalah benar untuk setiap bilangan asli, jadi $\langle n, m \rangle R \langle n, m \rangle$; sehingga R adalah refleksi

Hal yang terpenting dari relasi ekuivalen adalah mampu menginduksi sebuah grup dari himpunan dasar ke himpunan bagian(subset). Contoh:

Contoh 2.4.2

1. Misal A adalah himpunan setiap objek yang mempunyai satu warna; dapat berupa blok atau bola ataupun benda yang serupa. Jika kita mengajarkan anak untuk membedakan warna, kita akan meminta anak untuk memisahkan objek sesuai warnanya. Dengan melakukan ini, kita melatih anak untuk

bekerja dengan relasi R pada A , yang didefinisikan oleh:

xRy jika x dan y memiliki warna yang sama

Pemisahan objek-objek akan menjadi sebuah himpunan $\{y \in A : xRy\}$. Untuk beberapa $x \in A$; akan ditunjukkan satu objek (objek x) katakan ubin biru, dan kita meminta anak untuk memisahkan objek yang berwarna biru (setiap y memiliki warna yang sama). Ingat bahwa setiap objek A merupakan satu tumpukan yang sama.

2. Pada permulaan bagian kita memandang pada relasi R pada $\mathbb{N}$, dimana xRy jika x dan y memiliki sisa hasil bagi ketika dibagi 3. grup bilangan asli dikelompokkan kedalam tiga himpunan bagian (subset):

$$A = \{0, 3, 6, 9, \dots\}$$

$$B = \{1, 4, 7, 10, \dots\}$$

$$C = \{2, 5, 8, 11, \dots\}$$

Perhatikan bahwa

$A = \{n \in \mathbb{N} : 0Rn\}$, $B = \{n \in \mathbb{N} : 1Rn\}$, $C = \{n \in \mathbb{N} : 2Rn\}$. A, B, C adalah disjoint berpasangan dan gabungannya merupakan semua anggota $\mathbb{N}$

Definisi 2.4.2.

Misal A adalah himpunan non kosong. Sebuah family $\mathcal{P}$ dari himpunan bagian non kosong dari A disebut partisi A ,

jika setiap anggota A merupakan memiliki tepat anggota dari $\mathcal{P}$. Dengan kata lain,

1. Untuk setiap $S, T \in \mathcal{P}$ maka $S \cap T = \emptyset$,
2. Gabungan setiap anggota $\mathcal{P}$ adalah A

Anggota dari partisi disebut class dari $\mathcal{P}$. Sebuah partisi A juga merupakan sebuah klasifikasi.

Contoh 2.4.2

1. Himpunan semua siswa dalam suatu kursus dapat dipartisi kedalam class
 - a. C_1 – himpunan siswa tahun pertama
 - b. C_2 – himpunan siswa tahun kedua
 - c. C_3 – himpunan siswa tahun ketiga
 - d. C_4 – himpunan siswa tahun keempat
2. Misal A adalah himpunan 23 pria yang berada pada lapangan sepak bola. Kita dapat mempartisi A kedalam dua class yang terdiri dari 11 anggota (tim) dan satu class dengan satu anggota (wasit)
3. Kita dapat mempartisi himpunan manusia pada waktu tertentu kedalam class berdasarkan hari dan bulan kelahiran. Ini memerlukan 366 class yang berbeda.

Jika $\mathcal{P}$ adalah partisi A , dan jika class tersebut didefinisikan dengan sifat-sifat tertentu, maka setiap anggota dari class tertentu memiliki sifat yang mendefinisi class; dengan kata lain, setiap anggota dari class memiliki sama atau ekuivalen dengan sifat definisi dari class.

Tujuan selanjutnya adalah menunjukkan ekivalensi relasi dan partisi pada dua sisi dari koin yang sama: setiap ekivalensi relasi menginduksi partisi unik dan sebaliknya.

Definisi 2.4.3

1. Misal R adalah ekivalensi relasi pada A ; untuk setiap $x \in A$, himpunan $\{y \in A: xRy\}$ disebut R -Class dari x , dan dinotasikan Rx . Himpunan $\{Rx: x \in A\}$ dari semua R -Class di notasikan $\mathcal{P}(R)$
2. Misal $\mathcal{P}$ adalah sebuah partisi A ; relasi $E(\mathcal{P})$ didefinisikan pada A sebagai berikut:
(2.4) $\langle x, y \rangle \in E(\mathcal{P})$ jika x dan y berada pada class yang sama dari $\mathcal{P}$.

Teorema utama adalah seperti berikut:

Teorem 2.4.1

1. Misal R adalah relasi ekivalen pada A ; maka $\mathcal{P}(R)$ adalah partisi A .
2. Misal $\mathcal{P}$ adalah partisi A ; maka $E(\mathcal{P})$ relasi ekivalen pada A
3. $E(\mathcal{P}(R)) = R$ dan $\mathcal{P}(E(\mathcal{P})) = \mathcal{P}$

Pembuktian.

1. Berdasarkan definisi 2.4.2 akan ditunjukkan tiga hal:
 - a. Setiap R -class adalah tidak kosong
 - b. Jika Rx dan Ry adalah R -class berbeda, maka irisannya adalah kosong
 - c. Gabungan dari semua R -class adalah semua anggota A , contoh. Setiap anggota A adalah pada satu R -class

Karena R adalah refleksi, maka untuk setiap $x \in A$ bahwa xRx ; maka $x \in Rx$. Jadi setiap R -class adalah non himpunan kosong, dan setiap anggota A adalah satu R -class; ini membuktikan (a) dan (c).

Claim. Jika $y \in Rx$ maka $Ry = Rx$

Pembuktian.

Andaikan bahwa $y \in Rx$

" $\Rightarrow$ ": Misal $z \in Ry$ maka dengan definisi Rx terhadap Ry , maka ada xRy dan yRz . Karena R adalah transitif, maka xRz sehingga $z \in Rx$.

" $\supseteq$ ": untuk konvers, $z \in Rx$ maka xRz berdasarkan xRz . Karena R adalah simetris, maka diperoleh yRx . Dengan menggunakan sifat transitif kita peroleh yRz , contoh $z \in Ry$. Ini menunjukkan bahwa $Rx \subseteq Ry$

Anaikan Rx dan Ry berada pada class yang berbeda. Asumsikan bahwa $Rx \cap Ry \neq \emptyset$; maka ada beberapa $x \in Rx \cap Ry$; karena $z \in Rx$ maka terdapat xRz dan karena $z \in Ry$ maka terdapat yRz . Karena R adalah Simetris, maka zRy . Diperoleh xRz dan zRy berdasarkan sifat transitif maka R maka xRy . Contoh. x dan y berada pada R -class yang sama. Hal ini berdasarkan Claim bahwa $Rx = Ry$, yang kontradiksi bahwa Rx dan Ry berbeda. Jadi asumsinya salah sehingga $Rx \cap Ry = \emptyset$.

2. Dengan definisi partisi, setiap anggota x dari A adalah tepat satu class. Karena setiap adalah sebuah anggota pada classnya sendiri, maka diperoleh $x \in E(\mathcal{P})x$, jadi $E(\mathcal{P})$ adalah refleksi.

Jika x berada pada class yang sama dengan y , maka y berada pada kelas yang sama dengan x ; jadi $x \mathcal{E}(\mathcal{P}) y$ maka $y \mathcal{E}(\mathcal{P}) x$ dan $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ adalah simetris.

Misal $x \mathcal{E}(\mathcal{P}) y$ dan $y \mathcal{E}(\mathcal{P}) z$; maka x dan y berada pada kelas yang sama dan y dan z berada pada kelas yang sama. Karena class yang berbeda memiliki anggota yang tidak sama, x dan z berada pada class yang sama, contoh $x \mathcal{E}(\mathcal{P}) z$. Ini menunjukkan bahwa $\mathcal{E}(\mathcal{P})$ adalah transitif.

3. Untuk bagian pertama, misal $x \mathcal{E}(\mathcal{P}(R)) y$; maka x dan y berada pada class yang sama dari $\mathcal{P}(R)$, contoh $Rx = Ry$ maka xRy .

Sebaliknya, jika xRy , maka $Rx = Ry$ sehingga $x \mathcal{E}(\mathcal{P}(R)) y$

Pembuktian untuk bagian yang kedua dijadikan sebagai latihan.

2.4.1 Latihan-latihan

Latihan 16. Tentukan semua partisi $\{a, b, c, d\}$

Latihan 17. Selesaikan pembuktian pada Teorema 2.4.1 pada halaman sebelumnya

Latihan 18. Buktikan bahwa untuk relasi ekivalen R , $R = R^*$ dan $R \circ R = R$

BAB 3



FUNGSI

3.1 Definisi Dasar

Definisi 3.1.1 Sebuah fungsi adalah sebuah triple order $\langle f, A, B \rangle$ sedemikian hingga

1. A dan B adalah himpunan dan $f \subseteq A \times B$
2. Untuk setiap $x \in A$ ada beberapa $y \in B$ sedemikian hingga $\langle x, y \rangle \in f$
3. Jika $\langle x, y \rangle \in f$ dan $\langle x, z \rangle \in f$ maka $y = z$; dengan kata lain, bentuk tersebut adalah unik dalam hal $x \in A$ adalah sebuah bentuk dengan paling banyak satu anggota B

A disebut domain f dan B kodomainnya

fungsi $\langle f, A, B \rangle$ lazimnya ditulis sebagai $f: A \rightarrow B$. Jika $\langle x, y \rangle \in f$ maka ditulis $y = f(x)$, dan y disebut image x dalam f .

Himpunan

$\{y \in B: \text{ada } x \in A \text{ sedemikian hingga } y = f(x)\}$ disebut range f

Perhatikan bahwa range f adalah selalu subset dari kodomain. Perhatikan perbedaan antara $f(x)$ dan f : dimana $f(x)$ adalah anggota dari kodomain, f adalah aturan dari bentuk yang digamarkan sebagai subset dari $A \times B$

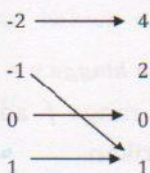
Andaikan bahwa $f: A \rightarrow B$ dan $g: C \rightarrow D$ adalah fungsi. Berdasarkan definisi dari fungsi bahwa fungsi adalah sama jika dan hanya jika :

1. $A = C$
2. $B = D$
3. $f = g$

Jika sebuah fungsi $f: A \rightarrow B$. Disebut sebuah fungsi f , namun yang harus di ingat bahwa fungsi adalah terdefinisi jika terdapat sebuah domain dan kodomain

Biasanya, terdapat kesepakatan pada domain dan kodomain, f diketahui dengan aturan. Contoh, $f(x) = x^2$, $f(t) = \sin t$, $f(n) = n + 1$. Karena dalam bagian sebelumnya dari relasi, kita terkadang menggunakan diagram untuk mendeskripsikan sebuah fungsi; sebagai contoh, diagram pada gambar 3.1 menggambarkan fungsi $f: A \rightarrow B$ dimana $A = \{1, -1, 0, -2\}$ adalah domain dari f , $B = \{1, 0, 2, 4\}$ adalah kodomain dan $f = \{(1,1), (-1,1), (0,0), (-2,4)\}$

Gambar 3.1 : diagram panah fungsi



Perhatikan bahwa untuk setiap $x \in A$, $f(x) = x^2$. Dapat juga ditulis sebagai $x \rightarrow x^2$. Definisi dari fungsi menunjukkan bahwa setiap anggota A adalah himpunan

asal tepat satu tanda panah; ini tidak menunjukkan bahwa anggota B adalah tujuan tanda panah atau hanya satu tanda panah dari titi A ke satu anggota B . Fungsi dengan sifat demikian memiliki nama yang spesial, dan akan di dibahas pada bagaian selanjutnya.

Definisi 3.1.2

Andaikan $f: A \rightarrow B$ adalah sebuah fungsi

1. Jika $A = B$ dan $f(x) = x$ untuk setiap $x \in A$, f disebut fungsi identitas pada A , dan dinotasikan id_A . Bandingkan ini dengan latihan 13.
2. Jika $A \subseteq B$ dan $f(x) = x$ untuk setiap $x \in A$, maka f disebut fungsi inklusi dari A ke B , atau inklusi sederhana. Perhatikan bahwa jika $A = B$ dan f adalah inklusi, maka f adalah identitas pada A .
3. Jika $f(x) = x$ untuk beberapa $x \in A$ maka x disebut titik tetap (fixed point) f
4. Jika $f(x) = b$ untuk setiap $x \in A$, maka f disebut fungsi konstan
5. Jika $g: C \rightarrow D$ adalah sebuah fungsi sedemikian hingga $A \subseteq C, B \subseteq D$, dan $f \subseteq g$ disebut Extension (perpanjangan) f terhadap C dan f disebut restriction (pembatasan) g ke A .

Disamping sebuah fungsi memiliki banyak extension yang berbeda, namun fungsi hanya memiliki satu restriction ke subset dari domainnya diagram berikut mengilustrasikan situasi:

Perhatikan bentuk penugasan $h(x) = (\sin x)^2$, dan andaikan bahwa $\text{dom } h = \text{codom } h = \mathbb{R}$. Untuk memperoleh $h(x)$ untuk x diketahui, perhatikan:

1. Tentukan $\sin x$ dan himpunan $y = \sin x$
2. Selanjutnya tentukan y^2

Jika dilihat lebih dekat, akan ditemukan bahwa terdapat dua fungsi untuk memperoleh $h(x)$:

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$
2. $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(y) = y^2$

Ini menunjukkan bahwa $h(x) = g(f(x))$: pertama tunjukkan f ke x . Ini akan membawa ke definisi:

Definisi 3.1.3

Misal $f: A \rightarrow B$ dan $g: C \rightarrow D$ adalah fungsi sedemikian hingga $\text{ran } f \subseteq \text{dom } g$. Maka fungsi $g \circ f: A \rightarrow C$ didefinisikan $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ disebut fungsi komposisi dari f dan g .

Perhatikan bahwa ini berbeda dengan komposisi relasi dari definisi 2.2.4 ; alasan penggunaan interpretasi yang berbeda dari komposisi fungsi adalah historis, dan kita akan membahas secara lebih detail

Lemma 3.1.1

Jika f dan g adalah fungsi sedemikian hingga $f \subseteq \text{dom } g$, maka $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f$, dan $\text{codom}(g \circ f) = \text{codom } g$

Pembuktian.

Hal ini berdasarkan definisi fungsi komposit

Salah satu sifat yang berguna dari komposisi fungsi adalah sebagai berikut:

Lemma 3.1.2

Andaikan $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$ adalah fungsi, maka $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ contoh. Komposisi dari fungsi adalah asosiatif
Pembuktian.

Misal $p = h \circ (g \circ f)$ dan $q = (h \circ g) \circ f$; untuk menunjukkan dua fungsi adalah sama, kita menggunakan definisi 3.1.1; dengan menentukan domain dan kodomain dari fungsi tersebut.

Dari sudut pandang p , p adalah komposit dari fungsi $g \circ f$ dan h , jadi kita lihat terlebih dahulu pada $g \circ f$.
 $\text{dom}(g \circ f) = \text{dom } f = A$ berdasarkan lemma 3.1.1, jadi,
 $\text{dom } p = \text{dom } h \circ (g \circ f) = A$ selanjutnya,
 $\text{codom } p = \text{codom } h \circ (g \circ f) = \text{codom } h = D$,
berdasarkan lemma 3.1.1

Dari sudut pandang q , dengan alasan yang sama bahwa $q = A$ dan bahwa $\text{codom } q = \text{codom } (h \circ g)$. Karena $\text{codom } (h \circ g) = \text{codom } h$, maka terdapat $\text{codom } h = D$, jadi diperoleh bahwa $\text{dom } p = \text{dom } q$ dan $\text{codom } p = \text{codom } q$

Berdasarkan hal tersebut diatas, akan ditunjukkan bahwa $p = q$, contoh $p(x) = q(x)$ untuk setiap $x \in A$.
Misal $x \in A$; maka

$$\begin{aligned} p(x) &= (h \circ (g \circ f))(x) \\ &= h((g \circ f)(x)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= h(g(f(x))) \\
 &= (h \circ g)(f(x)) \\
 &= ((h \circ g) \circ f)(x) \\
 &= q(x)
 \end{aligned}$$

Jadi, $(p, A, D) = (q, A, D)$

Latihan-latihan

Latihan 19.

Untuk setiap kasus berikut, jika mungkin tentukan domain, kodomain dan aturan untuk $g \circ f$ dan $f \circ g$:

1. $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}, f(n) = n + 1; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sqrt[3]{x}$
2. $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(x) = -x; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x$
3. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 3x; g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{3}$

3.2 Fungsi Satu-satu, Onto dan Bijektif

Definisi 3.2.1 Andaikan $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi

1. f disebut onto atau surjektif jika $\text{codom } f = \text{ran } f$.

Jika f adalah surjektif maka ditulis $f : A \rightarrow B$

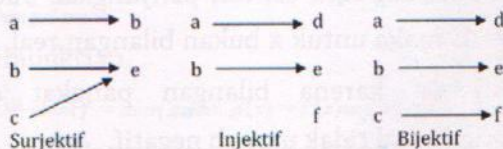
2. f disebut fungsi satu-satu atau injektif jika untuk setiap $x, y \in A, f(y) = x$ maka $x = y$. Jika f adalah injektif ditulis $f : A \rightarrow B$

3. f disebut bijektif jika f adalah fungsi onto atau satu-satu

jadi, f adalah onto, jika pada gambar yang ditunjukkan, paling sedikit satu tanda panah memasangkan setiap anggota pada kodomain; dengan kata lain, untuk setiap

$y \in \text{codom } f$ terdapat paling sedikit satu anggota x dari dom dengan $f(x) = y$. Jika f adalah fungsi satu-satu, maka paling banyak satu tanda panah memasangkan pada setiap anggota dari $\text{codom } f$, lihat gambar 3.2.

Gambar 3.2 : jenis-jenis fungsi



Contoh 3.2.1

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x :$

f adalah fungsi satu-satu: akan ditunjukkan untuk setiap $x, y \in \mathbb{R}, f(x) = f(y)$ maka $x = y$. Misal $f(x) = f(y)$; berdasarkan definisi $f, f(x) = 2x$ dan $f(y) = 2y$. Karena $f(x) = f(y)$, menurut definisi f maka $2x = 2y$ sehingga $x = y$.

f adalah fungsi onto: untuk setiap bilangan real y . Akan diperoleh sebuah bilangan real x sedemikian hingga $f(x) = y$ dimana berdasarkan definisi f adalah $2x = y$. Dengan menyelesaikan persamaan tersebut diperoleh $x = \frac{y}{2}$; jadi $f\left(\frac{y}{2}\right) = y$.

Karena f adalah fungsi satu-satu, maka bijektif

2. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 :$

f bukan fungsi satu-satu: untuk menunjukkan sebuah objek tidak memiliki sifat tertentu, cukup dengan hanya menunjukkan satu contoh

penyangkal, jadi, untuk menunjukkan bahwa f bukan fungsi satu-satu, akan diperoleh dua bilangan real x dan y yang berbeda sedemikian hingga $f(x) = f(y)$. Ini dapat diperoleh dengan memilih $x = 1$ dan $y = -1$

f bukan fungsi onto: dapat diperoleh dengan menentukan satu contoh penyangkal. Jika contoh, $y = 1$, maka untuk x bukan bilangan real, diperoleh $f(x) = y$ karena bilangan pangkat dua dari bilangan real tidak pernah negatif.

3. Andaikan $\mathbb{R}^+$ merupakan himpunan bilangan real positif dan didefinisikan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ oleh $f(x) = x^2$. Perhatikan bahwa diperoleh hanya dengan menukar kodomain dari contoh sebelumnya. Fungsi tersebut bukan fungsi satu-satu, karena setiap bilangan real positif adalah bilangan pangkat dua (kuadrat).
4. Andaikan $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ didefinisikan oleh $f(x) = x^2$. Kita hanya menukar domain dari f dari contoh 2. Fungsi tersebut bukan merupakan fungsi onto- kodomain adalah setiap anggota $\mathbb{R}$, dan bilangan negatif bukan bilangan kuadrat dari bilangan real. Namun f yang baru adalah fungsi satu-satu, karena setiap bilangan real memiliki paling banyak satu akar positif.

Contoh ini menegaskan bahwa sifat-sifat menjadi fungsi satu-satu atau fungsi onto tidak hanya tergantung pada aturan penugasan, namun juga pada domain dan kodomain dari fungsi. Pada faktanya, dengan mengubah

kodomain dari fungsi, dapat diperoleh sebuah fungsi surjektif dengan domain yang sama dan aturan penugasan yang sama:

Lemma 3.2.1

Andaikan $f : A \rightarrow B$ merupakan sebuah fungsi; maka

$g : A \rightarrow \text{ran } f$ didefinisikan oleh $g(x) = f(x)$ untuk semua $x \in A$

Adalah fungsi onto

Pembuktian.

Karena $\text{dom } f = \text{dom } g$, dan $g(x) = f(x)$ untuk semua $x \in A$, g adalah sebuah fungsi. Untuk menunjukkan bahwa g adalah fungsi onto, misalkan $y \in \text{codom } g$. Berdasarkan definisi g , $\text{codom } g = \text{ran } f$; jadi terdapat $x \in A = \text{dom } f$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Karena $\text{dom } f = \text{dom } g$ maka diperoleh $x \in \text{dom } g$; lebih lanjut, karena $f(x) = g(x)$ diperoleh $g(x) = y$. Ini menunjukkan bahwa g adalah fungsi onto.

Setiap fungsi $f : A \rightarrow B$ dapat ditulis sebagai komposisi $f = h \circ g$ dari fungsi dimana g adalah fungsi surjektif dan h adalah fungsi injektif. Ini merupakan teorema penting yang dapat digunakan dalam banyak konteks aljabar. Untuk mempersiapkan pembuktian, dibutuhkan:

Definisi 3.2.2

Andaikan $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi. Maka relasi ekuivalen resmi θ_f dari f didefinisikan oleh

$$x\theta_f y \Leftrightarrow f(x) = f(y) \text{ untuk semua } x, y \in A$$

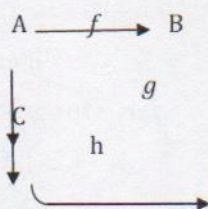
Himpunan $\{\theta_f x : x \in A\}$ dari class ekivalen θ_f disebut himpunan hasil bagi A terhadap f , ditulis sebagai A/θ_f atau himpunan hasil bagi sederhana, jika f dapat dipahami

Teorema 3.2.2

Andaikan $f : A \rightarrow B$ merupakan fungsi. Maka terdapat sebuah himpunan C , dan fungsi $g : A \rightarrow C, h : C \hookrightarrow B$ sedemikian hingga g adalah fungsi surjektif, h adalah fungsi injektif dan $f = h \circ g$

Situasi diatas ditunjukkan pada gambar 3.3

Gambar 3.3: Teorema Mapping



Pembuktian.

Himpunan $C = A/\theta_f$ dan andaikan $g : A \rightarrow A/\theta_f$ didefinisikan oleh $x \xrightarrow{g} \theta_f x$. Karena setiap anggota A terdiri tepat satu class $E(\theta_f)$, h adalah fungsi surjektif

Andaikan $h : A/\theta_f \rightarrow B$ didefinisikan sebagai berikut: andaikan $t \in A$, sedemikian hingga $t = \theta_f x$; himpunan $h(t) = f(x)$. Kita perlu menunjukkan bahwa definisi h adalah bebas dari pilih yang ditunjukkan x dari class t . Jadi, andaikan $y \in \theta_f x$. Berdasarkan definisi θ_f , maka akan diperoleh

$x\theta_f y$ jika dan hanya jika $f(x) = f(y)$, dan mengikuti $f(y) = f(x)$ untuk semua $y \in \theta_f x$

Akhirnya, diperoleh

$$(g \circ h)(x) = g(\theta_f x) = f(x)$$

3.2.1 Latihan-latihan

Latihan 20.

Dari fungsi-fungsi berikut, manakah yang merupakan fungsi satu-satu, onto atau bijektif?

Jelaskan jawabanmu!

1. $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \sin x$
2. $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, g(n) = n + 1$
3. $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^+, h(n) = n + 1$
4. $r : \mathbb{R} \rightarrow \{0\}, r(x) = 0$

Latihan 21

Andaikan $f : A \rightarrow B$ adalah fungsi. Tunjukkan bahwa θ_f adalah relasi ekuivalen pada A

3.3. Fungsi Invers dan Permutasi

Ingat definisi 2.2.3 dari konvers $R^\sim$ dari sebuah relasi R pada himpunan A ; diperoleh konvers $R^\sim$ dari R dengan membalikkan semua tanda panah, terhadap urutan order. Cara ini selalu mungkin, karena sebuah relasi adalah hanya sebuah himpunan pasangan berurutan tanpa kondisi lain dimasukkan.

Untuk sebuah fungsi, pembalikan tanda panah perlu tidak mendapatkan hasil pada fungsi lain: perhatikan

contoh pada gambar 3.2. pada fungsi surjektif, pemutaran arah tanda panah tidak memberi hasil in sebuah fungsi, karena terdapat dua anak panah tetap e .

Lebih lanjut, harus di ketahui bahwa peletakan f ke anggota dari $\text{dom } f$ dan maka peletakan g ke hasil memberi jalan keluar dimana kita mulai, dengan kata lain, $g(f(a)) = a$. Sifat ini decisive dan mengikuti :

Definisi 3.3.1

Andaikan $f : A \rightarrow B$ dan $g : B \rightarrow A$ merupakan fungsi; g disebut *invers* f , dinotasikan f^{-1} , jika $g(f(x)) = x$ untuk semua $x \in A$

Dengan kata lain, g adalah invers f jika dan hanya jika $g \circ f = id_A$. Contoh-contoh diatas mengarahkan bahwa sebuah fungsi yang tidak bijektif tidak mempunyai invers. Teorema berikut menunjukkan bahwa penelusuran ini adalah benar.

Teorema 3.3.1

$f : A \rightarrow B$ memiliki sebuah invers jika dan hanya jika f adalah fungsi injektif.

Pembuktian.

" $\Rightarrow$ ": andaikan bahwa $g : B \rightarrow A$ adalah invers f ; akan ditunjukkan bahwa f adalah fungsi satu-satu. Misalkan $x, y \in A$ dan $f(x) = f(y)$; maka $g(f(x)) = g(f(y))$.

Karena g adalah invers f , diperoleh $g(f(x)) = x$ dan $g(f(y)) = y$ maka $x = y$

" $\Leftarrow$ ": andaikan bahwa $f: A \rightarrow B$ adalah fungsi satu-satu; untuk setiap $y \in B$. Akan dibedakan kedalam dua kasus:

1. $y \in \text{ran } f$: maka ada tepat satu $x \in A$ sedemikian hingga $f(x) = y$, karena f adalah fungsi satu-satu, maka himpunan $g(y) = x$
2. $x \notin \text{ran } f$: pilih sembarang anggota y_x dari A , dan himpunan $g(y) = y_x$. Jadi $\text{dom } g = B, \text{codom } g = A$ dan karena f adalah fungsi satu-sat, setiap anggota dari B adalah tepat memiliki satu anggota A ; sehingga, $g: B \rightarrow A$ adalah fungsi

Terakhir, andaikan $x \in A$; berdasarkan definisi g , diperoleh $g(f(x)) = x$ yang menunjukkan bahwa g adalah invers f .

Ingat bahwa f adalah fungsi satu-satu namun bukan fungsi onto yang memiliki lebih dari satu fungsi invers, karena g didefinisikan sembarang untuk setiap $x \in B$ yang tidak berada pada range f . Anggota-anggota kodomain yang tidak dalam range f adalah sebuah jalan immaterial ke penugasan f ; dari contoh sebelumnya, diketahui bahwa fungsi satu-satu dapat dijadikan fungsi bijektif dengan restricting kodomainnya ke range. Jika f adalah fungsi bijektif maka hanya ada satu invers fungsi.

Teorema 3.3.2

Jika $f: A \rightarrow B$ adalah fungsi bijektif, maka f memiliki invers unik $g: B \rightarrow A$; lebih lanjut, f adalah sebuah invers ke g .

Pembuktian

Karena f adalah fungsi bijektif, fungsi satu-satu, dan memiliki invers $g : B \rightarrow A$. Andaikan bahwa $h : B \rightarrow A$ adalah sebuah invers ke f , contoh diketahui $h(f(x)) = x$ untuk setiap $x \in A$. Karena secara particular f adalah fungsi onto, untuk setiap $y \in B$ ada $x \in A$ sedemikian hingga $f(x) = y$; karena g adalah invers ke f , diperoleh $g(y) = g(f(x)) = x$ dan karena h juga sebuah invers ke f , diperoleh $h(y) = h(f(x)) = x$. Sehingga $g(y) = h(y)$ untuk setiap $y \in B$ yang menunjukkan $g = h$

Untuk bagian kedua, akan ditunjukkan bahwa $f(g(y)) = y$ untuk semua $y \in B$. Jadi, andaikan $y \in B$. Karena f adalah fungsi onto, ada sebuah $x \in A$ sedemikian hingga $f(x) = y$. Jadi,

$$f(g(y)) = f(g(f(x))) = f(x),$$

Karena g adalah invers dari f , sehingga $g(f(x)) = x$

Mari kita lihat sekilas pada fungsi bijektif $f : A \rightarrow A$, dimana A adalah himpunan terhingga.

Definisi 3.3.1 Andaikan $A = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ dan $f : A \rightarrow A$ merupakan fungsi bijektif, maka f disebut permutasi pada n .

Alasan pengulangan fungsi permutasi adalah bahwa fungsi tersebut menyusun anggota dari A dari order yang berbeda. Sebuah definisi yang lebih general dari permutasi akan di bolehkan karena sembarang domain himpunan terhingga. Sebagai contoh, jika terdapat n buku disusun

pada rak dan diletakkan pada order yang berbeda, akan ditunjukkan sebuah objek permutasi dari n objek.

Jika n sedikit, ada jalan yang mudah dengan gambar f ; sebagai contoh jika $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan

$f(1) = 1, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 2, f(5) = 4$, maka dapat ditulis:

k	1	2	3	4	5
$f(k)$	1	2	3	4	5

Perhatikan bahwa setiap anggota A muncul tepat sekali pada setiap dua baris, karena f adalah fungsi bijektif. Secara umum, jika $A = \{1, 2, \dots, n\}$ dan $f(1) = a_1, f(2) = a_2, \dots, f(n) = a_n$ fungsi dapat dilistkan sebagai berikut:

k	1	2	3		5
$f(k)$	a_1	a_2	a_3		a_n

Akan mudah untuk menentukan invers dari sebuah permutasi hanya dengan melihat dari bawah ke atas pada list yang berikan. Mari kembali pada contoh diatas: invers g dari f terlihat seperti berikut:

k	1	2	3	4	5
$f(k)$	1	2	3	4	5

Metode ini menunjukkan permutasi juga berguna untuk mendapatkan komposisi; lihat pada dua permutasi A berikut:

K	1	2	3	4	5
$f(k)$	2	3	4	1	5
$g(k)$	3	4	1	5	2

Dengan menggunakan tabel, ditentukan bahwa untuk $h = g \circ f$

k	1	2	3	4	5
$h(k)$	4	1	5	3	2

BAB 4



LATAR BELAKANG SISTEM KEKABURAN

4.1 Fenomena Fakta Kekaburan

Dalam kehidupan sehari-hari kita sering kali menjumpai objek-objek ataupun kondisi-kondisi yang mengandung gejala kekaburan. Sebagai contoh, dalam suatu kelas seorang guru mengintruksikan pada muridnya bahwa yang datang ke sekolah menggunakan sepeda motor untuk berdiri. Maka dengan seketika itu juga murid-murid yang datang ke sekolah menggunakan sepeda motor langsung berdiri, dan secara langsung pula kelas tersebut terbagi menjadi dua kelompok (himpunan) secara tegas, yaitu kelompok murid yang berdiri (yaitu murid yang datang ke sekolah menggunakan sepeda motor) dan kelompok murid yang duduk (yaitu kelompok murid yang datang ke sekolah dengan tidak menggunakan sepeda motor). Namun jika guru kemudian mengintruksikan bahwa murid-murid yang panjang rambut untuk berdiri, maka akan terjadi keraguan pada murid, apakah mereka termasuk himpunan murid yang panjang rambut atau tidak. Batas antara “datang ke sekolah menggunakan sepeda motor” dan “bukan dengan sepeda motor” adalah jelas dan tegas, tetapi tidak demikian untuk yang “rambut panjang” dan “rambut pendek”. Dengan demikian, himpunan murid berambut panjang dengan murid yang berambut pendek seakan-akan

dibatasi secara tidak tegas (kabur). Masih banyak lagi contoh-contoh kata/gejala kekaburan lainnya dalam kehidupan sehari-hari misalnya: tinggi, mahal, cantik, muda, dingin cepat, botak, dan lain sebagainya.

Kekaburan yang dikemukakan di atas adalah suatu contohkata/istilah kekaburan yang terdapat dalam kehidupan sehari-hari. **Masih banyak bentuk-bentuk kekaburan atau ketidaktegasan lainnya yang terdapat di sekeliling kita, misalnya:**

- a. Keambiguan (*ambiguity*), yang terjadi karena suatu kata istilah mempunyai makna ganda. Misalnya, kata "bulan" dapat berarti benda langit yang muncul di malam hari, tetapi juga dapat berarti satuan waktu yang merupakan bagian dari tahun.
- b. Keacakan (*randomness*), yaitu ketidakpastian mengenai sesuatu hal karena hal itu belum terjadi (akan terjadi). Misalnya, ketidakpastian mengenai masa depan seseorang atau mengenai cuaca esok hari.
- c. Ketidakjelasan tidak lengkapnya informasi yang ada (*incompleteness*). Misalnya, ketidakjelasan mengenai kehidupan di luar angkasa.
- d. Ketidaktepatan (*imprecision*) yang disebabkan oleh keterbatasan alat dan metode untuk mengumpulkan informasi. Misalnya, ketidaktepatan hasil pengukuran dalam fisika atom.
- e. Kekaburan semantik yaitu kekaburan yang disebabkan karena makna dari suatu kata/istilah tidak dapat didefinisikan secara tegas, misalnya cantik, tinggi, pandai, dan sebagainya.

Berkaitan dengan pembahasan di atas, maka yang akan kita bahas dalam buku ini adalah kekaburan semantik. Istilah "kabur" yang dipakai dalam buku ini adalah terjemahan dari kata dalam Bahasa Inggris "fuzzy". Perlu ditekankan di sini bahwa yang bersifat kabur itu adalah makna dari kata/istilah yang menjadi obyek dari teori baru yang akan dibahas dalam buku ini, sedangkan teorinya sendiri yang dikembangkan untuk memodelkan dan menyelidiki gejala kekaburan itu adalah teori yang tegas dan pasti.

4.2 Kekaburan Semantik

Ketidaktegasan atau kekaburan memang merupakan salah satu ciri dari bahasa sehari-hari yang kita gunakan untuk mengungkapkan konsep/gagasan dan berkomunikasi dengan orang lain. Banyak kata/istilah yang kita pakai dalam bahasa sehari-hari pada taraf tertentu memuat salah satu bentuk kekaburan. Dalam buku ini kita akan membatasi diri pada bentuk kekaburan tertentu, yaitu, kekaburan semantik Suatu kata/istilah dikatakan kabur (fuzzy, vague) secara semantik apabila kata/istilah tersebut tidak dapat didefinisikan secara tegas, dalam arti tidak dapat ditentukan secara tegas (benar atau salah) apakah suatu obyek tertentu memiliki ciri/sifat yang diungkapkan oleh kata/istilah itu atau tidak Meskipun barangkali kita sepakat mengenai makna tegas dari suatu istilah sehingga kita pada umumnya dapat berkomunikasi secara cukup memadai dengan menggunakan istilah itu, tetapi bagaimanapun pasti terdapat perbedaan pemaknaan terhadap istilah tersebut oleh masing-masing individu, yang

diakibatkan misalnya oleh persepsi pribadi, lingkungan kebudayaan, latar belakang pengalaman dan pendidikan, dan lain-lain. Dalam contoh di atas, istilah "pandai" mengandung makna tegas yang pada umumnya diterima oleh kebanyakan orang (misalnya, seorang mahasiswa yang pada akhir semester mencapai indeks prestasi di bawah 1.00 pasti tidak akan diberi predikat "pandai"), tetapi tetap ada ketidaktegasan apakah Tanto yang indeks prestasinya 2.40 dapat disebut "pandai" atau tidak. Temannya yang mencapai indeks prestasi jauh di bawah Tanto barangkali akan menganggapnya pandai, tetapi seorang dosen yang mempunyai tuntutan yang tinggi terhadap para mahasiswanya mungkin tidak akan menggolongkan Tanto sebagai mahasiswa yang pandai. Jadi kita tidak dapat menentukan secara tegas apakah Tanto itu termasuk mahasiswa yang pandai atau tidak. Memang, salah satu ciri dari bahasa sehari-hari adalah, dalam taraf tertentu, mengandung ketidaktegasan atau kekaburan semacam itu.

Ketidaktegasan semantik ini dari segi keilmuan seringkali menimbulkan masalah karena penelitian ilmiah pada umumnya memerlukan ketepatan dan kepastian berkenaan dengan makna istilah-istilah yang dipakai untuk mengatasi masalah itu biasanya diciptakan suatu "bahasa" sendiri sesuai dengan bidang ilmu yang bersangkutan. Meskipun bahasa ilmiah buatan semacam itu berguna dalam ilmu yang bersangkutan, namun dalam arti tertentu merupakan bahasa yang sangat terbatas karena kehilangan kemampuan untuk menjangkau seluruh kekayaan makna dan nuansa yang terkandung dalam istilah-istilah bahasa sehari-hari. Realitas dunia kita ini terlalu rumit untuk dapat

dideskripsikan dengan bahasa yang tegas. Demikian pula pengetahuan manusia, yang merupakan salah satu soko guru perkembangan ilmu dan teknologi, tidak mungkin diformulasikan secara lengkap dengan bahasa buatan. Lagipula ilmu dan teknologi hanya dapat berkembang melalui komunikasi para pelakunya, dan komunikasi itu baru memadai kalau mereka dapat mengungkapkan seluruh gagasan, serta idenya secara lengkap. untuk itu seringkali justru diperlukan istilah-istilah kaya-makna yang secara semantik memang tidak tegas. Maka diperlukan suatu bahasa keilmuan baru yang mampu menangkap dan mengungkap ketidaktegasan/ kekaburan istilah-istilah dari bahasa sehari-hari secara memadai.

4.3 Dasar Himpunan Kabur

Teori kabur pertama sekali dipelopori oleh Lotfi Asker Zadeh, seorang guru besar pada University of California, Amerika Serikat. Sejak tahun 1960 Profesor Zadeh telah merasa bahwa sistem analisis matematik tradisional yang dikenal sampai saat itu bersifat terlalu eksak sehingga tidak dapat berfungsi dalam banyak masalah dunia nyata yang seringkali amat kompleks. Dalam salah satu karangannya ia menulis:

" We need a radically different kind of mathematics, the mathematics of fuzzy or cloudy quantities..... for in most practical cases the a priori data as well as the criteria by which the performance of a man made system is judged are far from being precisely specifidd..."

Ide mengenai "derajat keanggotaan" dalam suatu himpunan baru muncul dalam benaknya tatkala ia

mengunjungi orangtuanya di New York pada liburan musim panas tahun 1964. Setelah menggodok dan mematangkan ide tersebut serama berbulan-bulan, akhirnya pada tahun 1965, Profesor Zadeh mempublikasikan karangan ilmiahnya berjudul "Fuzzy Sets" yang oleh para pakar di kemudian hari dianggap sebagai karya monumental yang melahirkan bahasa baru yang diimpikan itu. Terobosan baru yang diperkenalkan Zadeh dalam karangan tersebut adalah memperluas konsep 'himpunan' klasik menjadi himpunan kabur (fuzzy set), dalam arti bahwa himpunan klasik (himpunan tegas, *crisp set*) merupakan kejadian khusus dari himpunan yang kabur itu. Dalam teori himpunan klasik, yang dikembangkan oleh Georg Cantor (1845-1918), himpunan didefinisikan sebagai suatu koleksi obyek-obyek yang terdefinisi secara tegas, dalam arti dapat ditentukan semua tegas apakah suatu obyek adalah anggota himpunan itu atau tidak. Dengan demikian, suatu himpunan tegas A dalam semesta X dapat didefinisikan dengan menggunakan suatu fungsi $\chi_A: X \rightarrow \{0,1\}$, yang disebut *fungsi karakteristik* dari himpunan A , di mana untuk setiap $x \in X$

himpunan A , di mana untuk setiap $x \in X$

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } x \in A \\ 0 & \text{untuk } x \notin A \end{cases}$$

Dengan memperluas konsep fungsi karakteristik itu, Zadeh mendefinisikan himpunan kabur dengan menggunakan apa yang disebutnya *fungsi keanggotaan* (*membership function*), yang nilainya berada dalam selang tertutup $[0,1]$. Jadi keanggotaan dalam himpunan tidak lagi

merupakan sesuatu yang tegas (yaitu anggota atau bukan anggota), melainkan sesuatu yang berderajat atau bergradasi secara kontinu. Konsep "pandai", yang dalam kerangka teori himpunan klasik tidak dapat dipakai untuk membentuk suatu himpunan (misal-nya: "Himpunan orang yang pandai"), dalam teori himpunan kabur justru merupakan suatu himpunan dengan fungsi keanggotaan tertentu. Setiap orang, dengan taraf kepandaianya masing-masing, merupakan anggota himpunan kabur tersebut dengan derajat keanggotaan tertentu.

Selanjutnya berdasarkan konsep himpunan kabur itu, Zadeh juga mengembangkan konsep algoritma kabur (1968), yang merupakan landasan dari logika kabur (*fuzzy logic*) dan penalaran hampiran (*approximate reasoning*), yaitu penalaran yang melibatkan pernyataan-pernyataan dengan predikat yang kabur. Perkembangan teori kabur selanjutnya amat ditentukan oleh aplikasi logika kabur di berbagai bidang yang berhasil diciptakan.

4.4 Perkembangan Teori Kabur

Selama tiga dekade pertama sejak dipelopornya, teori kabur mengalami perkembangan yang sangat pesat. Semula teori kabur yang diciptakan oleh Zadeh itu ditolak mentah-mentah oleh para ilmuwan di Amerika serikat, karena dicurigai sebagai suatu teori yang tidak memiliki dasar matematik yang dapat dipertanggungjawabkan dan bertentangan dengan hakikat ilmu karena memasukkan unsur-unsur kekaburan. Tradisi ilmu dan teknologi yang berakar kuat dalam metode kuantitatif-numerik selama berabad-abad tidak memberi tempat bagi komputasi

linguistik yang diusulkan oleh Zadeh itu. Tidak ada jurnal ilmiah yang tertarik untuk menerbitkan karangan Zadeh mengenai "Fuzzy Sets", itu, kecuali jurnal "Information and Control" yang salah seorang anggota redaksinya adalah Zadeh sendiri. William Kahan, seorang gurubesar matematika dan ilmu komputer, kolega Zadeh di universitas yang sama, pada tahun 1975 memberikan penilaian yang amat negatif mengenai teori kabur ketika ia berkata:

"Fuzzy theory is wrong, wrong, and penicious. I cannot think of any problem that could not be solved better by ordinary logic...The danger of fuzzy theory is that it will encourage the sort of imprecise thinking that has brought us so much trouble."

Bahkan Zaden. dituduh telah menghambur-hamburkan uang negara, karena banyak penelitian yang dilakukannya didanai oleh NSF (National Science Foundation), sebuah institusi nasional milik pemerintah Amerika Serikat.

Sebaliknya di Eropa dan Jepang teori kabur disambut dengan hangat dan diterima dengan penuh antusiasme. Sementara Zadeh sendiri selama dekade yang pertama terus berusaha memperdalam dan mengokohkan landasan teori kabur itu sebagai suatu disiplin ilmu, para ilmuwan di luar Amerika Serikat dengan penuh semangat mempelajari paradigma baru keilmuan ini dan mencoba mengaplikasikannya di berbagai bidang ilmu dan peralatan dengan hasil yang mengagumkan. Para ilmuwan dari berbagai disiplin ilmu, seperti teknik, MIPA, ekonomi, psikologi, sosiologi, dan lain-lain meneliti dan memanfaatkan teori baru ini untuk mengembangkan

ilmunya masing-masing. Tahap perkembangan yang penting terjadi di Inggris pada tahun 1974 ketika E. H. Mamdani dan S. Assilian dari Universitas London berhasil untuk pertama kalinya menciptakan prototipe system kendali berbasis logika kabur untuk suatu mesin uap. Pada tahun 1978 untuk pertama kalinya teori kabur dimanfaatkan dalam dunia industri, yaitu berupa sistem kendali kabur untuk mengontrol proses pembuatan semen di suatu pabrik semen di Denmark. Di Jerman, Belanda, dan Jepang bermunculan pula aplikasi-aplikasi teori kabur itu, yang tidak hanya dimanfaatkan dalam sektor industri dan jasa, seperti perusahaan air minum, kereta api bawah tanah, lampu pengatur lalu lintas, dan sebagainya, tetapi juga dalam barang-barang konsumen seperti mesin cuci, alat pendingin udara, kamera, televisi, lemari es, dan lain-lain. Kereta api bawah tanah di Sendai, Jepang, yang dibangun oleh perusahaan Hitachi pada tahun 1987 dengan menggunakan sistem kendali otomatis berbasis logika kabur, adalah sistem kereta api yang terancang di dunia dengan pengoperasian yang dapat menghemat biaya sampai 10%. Perusahaan Matsushita (yang di luar Jepang dikenal dengan nama Panasonic) adalah perusahaan pertama yang memproduksi barang konsumen berbasis logika kabur berupa alat pengatur temperatur air pada pancuran (*shower*) untuk mandi pada tahun 1981, dan kemudian mesin cuci pakaian otomatis pada tahun 1990.

Tahap perkembangan penting lainnya terjadi ketika pada tahun 1986 M. Togai dan H. Watanabe berhasil menciptakan *chip VLSI (Very Large Scale Integration)* untuk memproses inferensi logika kabur dengan menggunakan

komputer. Chip ini amat mendukung dalam meningkatkan kinerja sistem-sistem berbasis kaidah kabur dalam aplikasi-aplikasi yang bekerja secara waktu-nyata. Togai sendiri kemudian mendirikan perusahaan *Togai Infralogic* yang memproduksi paket-paket perangkat keras dan lunak untuk mengembangkan aplikasi-aplikasi logika kabur. Sejak tahun 1994 perusahaan *Math Works* menambahkan *Fuzzy Logic Toolbox*, yang dapat dipakai untuk mendesain dan menyusun simulasi suatu sistem kabur, pada perangkat lunak *MATLAB* yang diproduksinya.

Diperkirakan saat ini telah lebih dari 15.000 karangan ilmiah mengenai teori kabur serta aplikasinya yang diterbitkan di jurnal-jurnal ilmiah. Lebih dari 1000 jenis barang produksi hasil aplikasi teori kabur telah dipatenkan.

Sementara itu bermunculan pula organisasi, kelompok kerja dan laboratorium, serta jurnal-jurnal ilmiah yang berkaitan dengan teori kabur. Pada tahun 1984 didirikan *International Fuzzy System Association (IFSA)*, yang merupakan organisasi ilmiah pertama bagi para pakar di bidang teori kabur dan aplikasinya. Pada tahun 1989 di Jepang didirikan *Society of Fuzzy Theory and Systems (SOFT)*, dan pada tahun 1998 diresmikan *European Society for Fuzzy Logic and Technology (EUSFLAT)*. Para pakar teori kabur di Spanyol mendirikan kelompok riset *Approximate Reasoning and Artificial Intelligence Group*, sementara itu di Austria didirikan *Fuzzy Logic Laboratorium Linz (FLLL)*, di Jerman dimulai *Research Group on Neural Networks and Fuzzy Systems*, di Jepang dibangun *Laboratory of International Fuzzy Engineering (LIFE)*, dan Zadeh sendiri pada tahun 1991 mempelopori berdirinya *Berkeley Initiative in Soft*

Computing (BISC). Berbagai jurnal ilmiah khusus mengenai teori kabur juga telah diterbitkan, seperti misalnya *Journal of Fuzzy Sets and Systems* (yang diterbitkan oleh IFSA), *The Journal of Fuzzy Mathematics*, *International Journal of Approximate Reasoning*, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, dan lain-lain.

Keberhasilan teori kabur di Eropa dan Jepang itulah yang akhirnya membuka mata para ilmuwan di Amerika Serikat untuk mengapresiasi hasil penemuan Zadeh itu. Pada tahun 1992 diselenggarakan *IEEE International Conference on Fuzzy Systems* yang pertama di San Diego, Amerika Serikat. Peristiwa ini dapat dikatakan merupakan suatu titik-balik yang menandakan diterimanya teori kabur oleh masyarakat ilmiah di Amerika. Pada saat ini teori baru ini telah berkembang dengan subur sebagai suatu cabang baru dalam lingkungan sains dan teknologi.

4.5 Pelopor Teori Kabur

Seperti telah dikemukakan di atas, bahwa teori kabur dipelopori dan diperkenalkan pertama sekali oleh Lotfi Asker Zadeh. Dia dilahirkan di Baku, Azerbaijan (ketika itu merupakan bagian dari Uni Soviet), pada tahun 1921. Ayahnya adalah seorang wartawan yang berasal dari Iran dan ibunya seorang dokter berkebangsaan Russia. Ketika ia berumur 10 tahun, keluarga Zadeh, kembali ke tanah leluhur ayahnya, yaitu Iran. Pada tahun 1942 ia lulus sarjana teknik listrik dari Universitas Teheran. Karena merasa bahwa ilmunya tidak dapat berkembang di Iran, ia kemudian melanjutkan studinya ke Amerika Serikat, dan memperoleh gelar MS dari *Massachusetts Institute of*

Technology (MIT) pada tahun 1946, dan Ph.D dari *Columbia University* pada tahun 1949. Ia memulai karirnya sebagai dosen di *Columbia University* pada jurusan Teknik Listrik, dan sejak tahun 1959 ia pindah ke *University of California, Berkeley*, di mana ia menjabat sebagai Ketua Jurusan Teknik Listrik dan Ilmu Komputer dari tahun 1963 sampai tahun 1968. Ia resmi pensiun pada tahun 1991, tetapi sampai saat ini masih tetap aktif meneliti, menulis, dan mengajar sebagai seorang *Professor Emeritus*, di samping menjabat sebagai direktur *Berkeley Initiative on soft computing (BISC)* yang didirikannya pada tahun 1991 itu juga.

Zadeh adalah seorang internasionalis sejati, yang memandang dunia ini tidak secara terkotak-kotak oleh suku atau kebangsaan. Baginya tidak penting apakah ia seorang Azerbaijan, atau Iran, atau Amerika. Ia merasa dirinya sebagai warganegara dunia, yang dibentuk oleh kekayaan berbagai kebudayaan dan cara berpikir manusia.



Gambar: Lotfi Asker Zadeh

Oleh teman-temannya Zadeh dikeal sebagai seorang pribadi yang tenang, sederhana, ramah, rendah hati, dan

tidak pernah menyombongkan diri. Cara bekerjanya sangat sistematis dan mendetil, dan seringkali dijuluki "manusia pensil" (karena lebih sering menulis memakai pensil, yang bisa dihapus, daripada pena). Ia tidak hanya seorang genius yang berhasil menciptakan suatu teori baru, tetapi juga berbakat untuk menjelaskan teori-teori rumit yang dipikirkannya, baik kepada para pakar maupun kepada orang-orang sederhana, dengan memberikan contoh-contoh konkret dari kehidupan sehari-hari. Ia adalah seorang penggemar fotografi yang lebih menyukai foto hitam-putih daripada foto berwarna.

Sampai tahun 1965, penelitiannya berkisar pada teori system dan analisis pengambilan keputusan. Sejak tahun tersebut, ia beralih ke teori kabur dan aplikasinya pada kecerdasan buatan, linguistik, logika, teori kendali, sistem pakar, dan jaringan saraf. Saat ini penelitiannya berfokus pada logika kabur, komputasi lunak, komputasi kata-kata, dan komputasi persepsi. Ia telah menghasilkan puluhan karya ilmiah di bidang teori kabur, kecerdasan buatan, teori kendali, dan sistem pakar. Banyak penghargaan internasional yang telah diperolehnya, seperti misalnya: *Honda Prize* (Jepang, 1989), *Kampe de Feriet* (Austri, 1992), *Grigore Moisil Prize for Fundamental Researches* (Romania, 1993), *Okawa Prize* (Jepang, 1996), *Bolzano Medal* (Cekoslowakia, 1997), *Richard E. Bellman Control Heritage Award* (Amerika, 1998), *IEEE Pioneer Award in Fuzzy System* (2000), *ACM 2000 Allen Newell Award* (2001), dan lain-lain. Ia menerima gelar *Doktor Honoris Causa* dari berbagai universitas bergengsi dunia serta berbagai piagam penghargaan internasional lainnya, dan diangkat menjadi

anggota kehormatan dari berbagai masyarakat ilmiah. Tidalah tanpa dasar apabila majalah *Azerbaijan Internasional* edisi Winter 1994 meramalkan bahwa: „*It's extremely likely that we'll be hearing about Zadeh for a long, long time to come.*”

4.6 Perbedaan Teori Kabur dengan Teori Probabilitas

Pada awalnya orang menganggap bahwa teori kabur sama saja dengan teori probabilitas. Teori probabilitas adalah suatu cabang matematika yang sudah mulai dikembangkan sejak abad 17 untuk menyelidiki gejala ketidakpastian, dan telah berhasil diterapkan dalam banyak bidang. Pada waktu teori kabur mulai dipublikasikan pada tahun 1965 para ahli teori probabilitas menganggap bahwa teori baru itu sama saja dengan teori probabilitas yang sudah lama dikenal dalam dunia matematika, karena kedua teori itu menangani gejala ketidakpastian dan ekeduanya mempunyai nilai dalam selang tertutup $[0,1]$. Maka mereka menganggap bahwa teori kabur itu bukanlah barang baru dan tidak menambah apa-apa dalam khazanah ilmu pengetahuan. Pandangan tersebut sama sekali tidak benar dan untuk meyakinkan hal itu kiranya perlu dijelaskan mengapa kedua teori tersebut tidaklah sama.

Baik teori probabilitas maupun teori kabur keduanya memang menangani gejala ketidakpastian, tetapi ketidakpastian yang berbeda jenisnya. Ketidakpastian yang digarap dalam teori probabilitas adalah keacakan (*randomness*), yaitu ketidakpastian mengenai sesuatu hal yang disebabkan karena hal itu belum terjadi (akan terjadi). Ketidakpastian semacam itu akan hilang, dan berubah menjadi kepastian, pada waktu hal itu telah terjadi. Misalnya seseorang

mengalami ketidakpastian mengenai apakah lamaran pekerjaannya ke sebuah perusahaan diterima atau tidak. Pada waktu ia menerima surat dari perusahaan itu, yang memberitahukan bahwa ia diterima, ketidakpastian itu langsung hilang dan berubah menjadi kepastian. Sedangkan ketidakpastian yang digarap dalam teori kabur adalah kekaburan semantik mengenai suatu kata/istilah yang tidak dapat didefinisikan secara tegas. Kekaburan semantik itu tetap ada (tidak berubah) meskipun halnya telah terjadi. Misalnya seseorang merasa tidak pasti apakah besok pagi cuacanya akan dingin atau tidak. Ketidakpastiannya mengenai keadaan cuaca besok pagi itu adalah keacakan (dengan peluang tertentu akan terjadi) yang besok pagi akan berubah menjadi kepastian, sedangkan dinginnya cuaca adalah suatu kekaburan semantic (dengan fungsi keanggotaan tertentu) yang besok pagi atau kapanpun tetap merupakan kekaburan. Lagipula dalam teori probabilitas jumlah peluang dari semua kemungkinan yang dapat terjadi harus sama dengan 1. Hal semacam ini tidak disyaratkan dalam teori himpunan kabur. Kedua teori itu memang berbeda, tetapi tidak perlu dipertentangkan, justru sebaliknya kedua teori itu dapat bekerjasama dan saling melengkapi. Misalnya dalam istilah "sangat mungkin terjadi" terkandung konsep keacakan maupun kekaburan semantik yang dapat digarap oleh kedua teori tersebut.

Berkaitan dengan kerjasama itu, pada awal dekade yang lalu Zadeh memperkenalkan suatu konsep baru yang disebutnya komputasi lunak (*soft computing*), yang merupakan sinergi dari beberapa teori dan metodologi untuk menghasilkan suatu sistem cerdas yang semakin

mendekati kecerdasan manusia dalam bernalar dan belajar dengan data-data yang tidak pasti dan tidak tepat. Unsur-unsur pokok dari komputasi lunak itu adalah teori kabur, jaringan saraf (*neural networks*), algoritma genetik (*genetic algorithms*), teori probabilitas, dan teori chaos.¹

¹Zadeh, L.A. 1995. "**Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic are Complementary rather than Competitive.**" *Technometrics*, 37 (3): 271-276.

BAB 5



TERMINOLOGI HIMPUNAN KABUR

5.1 Pengantar Himpunan Kabur

Himpunan klasik seperti yang telah kita bicarakan pada bab-bab sebelumnya adalah himpunan dengan batas yang jelas. Sebagai contoh himpunan klasik A adalah himpunan bilangan real yang lebih besar dari 160. Himpunan tersebut dapat dinyatakan sebagai:

$$A = \{ x \mid x > 160 \}$$

(5.1)

Jika x suatu bilangan yang lebih besar dari 160, maka x termasuk ke dalam himpunan A , dan jika sebaliknya maka x tidak termasuk dalam himpunan A .

Meskipun himpunan klasik cocok untuk bermacam-macam aplikasi dan telah terbukti menjadi alat penting bagi matematika dan pengetahuan komputer, himpunan klasik tidak menggambarkan konsep dan pikiran alam manusia, yang cenderung menjadi abstrak dan tidak teliti. Sebagai ilustrasi, secara matematika kita dapat mengekspresikan himpunan "orang tinggi" sebagai kumpulan orang yang mempunyai tinggi lebih dari 160 cm dan dapat dinyatakan seperti persamaan 1.1. Himpunan klasik tersebut akan mengelompokkan seseorang yang tingginya 160,001 cm

tidak masuk akal. Kekurangan itu berasal dari peralihan yang drastis antara menjadi anggota dan tidak menjadi anggota dalam himpunan.

Berbeda dengan himpunan klasik, himpunan kabur adalah himpunan tanpa batas yang jelas. Peralihan dari suatu anggota himpunan ke bukan anggota himpunan secara berjenjang dan peralihan berjenjang ini dikarakterisasi oleh fungsi keanggotaan, sehingga himpunan kabur dapat dimodelkan dengan ungkapan bahasa seperti “air yang panas” atau “temperatur yang tinggi”.

Fuzziness (kekaburan) tidak berasal dari keacakan anggota himpunan, tetapi berasal dari ketidakpastian dan ketidaktepatan pikiran serta konsep yang abstrak.

5.2. Definisi Dasar dan Terminologi

Misalkan X adalah ruang dari objek-objek dan x adalah elemen dari X . Himpunan klasik A , $A \subseteq X$ didefinisikan sebagai koleksi elemen-elemen atau objek-objek $x \in X$ sedemikian hingga x memenuhi salah satu “termuat” atau “tak termuat” di A . Dengan mendefinisikan fungsi karakteristik untuk setiap elemen x di X , maka kita dapat menyatakan himpunan klasik A dengan pasangan terurut $(x, 0)$ untuk $x \notin A$ atau $(x, 1)$ untuk $x \in A$. Berbeda dengan himpunan klasik di atas, himpunan kabur mengekspresikan derajat elemen yang termuat pada himpunan. Fungsi karakteristik dari himpunan kabur mempunyai nilai berkisar pada interval tertutup $[0, 1]$, yang menyatakan derajat keanggotaan suatu elemen dalam himpunan yang diberikan.

5.2.1 Himpunan Kabur (Fuzzy Sets) dan Fungsi Keanggotaan (Membership Function)

Definisi 5.1.

Jika X adalah koleksi objek-objek yang dinyatakan secara umum oleh x , maka himpunan kabur A di X didefinisikan sebagai himpunan pasangan terurut:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\} \quad (5.2)$$

$\mu_A(x)$ disebut fungsi keanggotaan (*membership function*) atau disingkat FK untuk himpunan kabur A . FK memetakan setiap elemen x ke tingkat keanggotaan (*membership grade*) atau nilai keanggotaan (*membership value*) dalam interval $[0, 1]$.

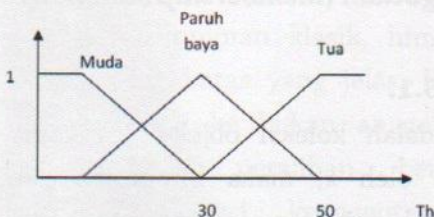
Defenisi himpunan kabur adalah perluasan sederhana dari defenisi himpunan klasik dengan fungsi karakteristik yang mempunyai nilai-nilai mulai dari 0 sampai dengan 1. Jika nilai dari FK atau $\mu_A(x)$ terbatas pada salah satu dari 0 atau 1, maka A direduksi ke himpunan klasik dengan fungsi karakteristik (*characteristic function*) dari A , yaitu:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{jika } x \in A \\ 0 & \text{jika } x \notin A \end{cases}$$

Contoh 4.1. Himpunan kabur dengan fungsi keanggotaannya

- a. $\tilde{A}$ = "Banyaknya anak yang usia muda (< 30 tahun)"
- b. $\tilde{B}$ = "Usia paruh baya sekitar 30 tahun"
- c. $\tilde{C}$ = "Usia Tua sekitar 50 tahun"

masing-masing dengan fungsi keanggotaan seperti pada gambar 5.1



Gambar 5.1 Himpunan Kabur dan Fungsi Keanggotaan

Biasanya X merujuk pada semesta pembicaraan atau seterusnya disederhanakan menjadi semesta dan konsisten untuk objek-objek diskrit (terurut atau tak terurut) atau ruang kontinu.

5.2.2 Himpunan kabur dengan semesta diskrit tak terurut.

Contoh 5.2.

Misal $X = \{\text{Banda Aceh, Jakarta, Medan}\}$ menyatakan himpunan kota-kota yang akan dipilih salah satu untuk tempat tinggal

Himpunan kabur $\tilde{C}$ menyatakan “kota yang diinginkan sebagai tempat tinggal” yang dideskripsikan sebagai:

$$\tilde{C} = \{ (\text{Banda Aceh}, 0.9), (\text{Jakarta}, 0.8), (\text{Medan}, 0.6) \}$$

Jelaslah bahwa semesta X adalah diskrit dan memuat objek berupa tiga kota di Indonesia yang tak terurut.

5.2.3 Himpunan kabur dengan semesta diskrit terurut

Contoh 5.3

Misal $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ menyatakan himpunan banyaknya anak pada suatu keluarga, maka himpunan kabur $\tilde{A} =$ "Banyaknya anak yang ideal pada suatu keluarga" seperti pada gambar 1.1 (a) di atas dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\tilde{A} = \{(0,0.1), (1,0.3), (2,0.7), (3,1)(4,0.7), (5,0.3), (6,0.1)\},$$

- Himpunan kabur $\tilde{A}$ mempunyai semesta diskrit terurut X .
- FK untuk himpunan kabur $\tilde{A}$ ditunjukkan pada gambar 1.1 (a).

Contoh 5.4

Pengusaha Real Estate ingin mengklasifikasikan rumah yang ditawarkan pada pelanggannya. Sebagai indikator kesenangan dari rumah-rumah ini adalah banyaknya kamar tidur dalam rumah yang dinyatakan dalam himpunan semesta $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Himpunan kabur $\tilde{A} =$ "tipe rumah yang sesuai untuk keluarga dengan 4 anggota" dapat diekspresikan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1)(5,0.7), (6,0.3)\},$$

- **Catatan:** Dalam himpunan kabur, unsur-unsur dalam semesta yang berderajat keanggotaan 0 tidak ditulis.

5.2.4 Himpunan kabur dengan semesta kontinu

Contoh 5.5

Misal $X = R^+$ himpunan usia yang mungkin dalam suatu kehidupan, maka himpunan kabur $\tilde{B}$ = "Usia sekitar 50 tahun" dapat diekspresikan sebagai:

$\tilde{B} = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}$
 dengan $\mu_B(x) = \frac{1}{1 + \left[\frac{x-50}{10}\right]^4}$ seperti diilustrasikan pada gambar 1.1.(b)

Dari contoh-contoh, jelas bahwa himpunan kabur bergantung pada dua hal, yaitu: (1) mengidentifikasi semesta yang cocok dan (2) menentukan fungsi keanggotaan yang sesuai. Menentukan fungsi keanggotaan adalah subyektif, yang berarti fungsi keanggotaan yang ditentukan untuk konsep yang sama (misalkan "banyak anak ideal pada suatu keluarga") oleh individu yang berbeda akan sangat bermacam-macam. Subyektivitas ini berasal dari perbedaan individu yang mengungkap konsep-konsep abstrak. Kaitan antara subyektivitas dengan keacakan sangat kecil. Jadi subyektivitas dan ketidakacakan adalah perbedaan utama antara himpunan kabur dengan teori probabilitas.

Notasi sederhana untuk menyatakan himpunan kabur sebagai berikut :

$$\tilde{A} = \begin{cases} \sum_{x_i \in X} \mu_A(x_i) / x_i & \text{jika } x \text{ koleksi dari objek-objek diskrit} \\ \int_x \mu_A(x) / x & \text{jika } x \text{ ruang kontinu (biasanya bil. real } R) \end{cases}$$

- **Catatan:** Tanda penjumlahan dan pengintegralan pada persamaan (5.3) merupakan gabungan pasangan $(x, \mu_A(x))$. Tanda-tanda tadi tidak menunjukkan penjumlahan dan pengintegralan. Demikian pula "/" hanya tanda dan tidak menyatakan pembagian.

5.2.5 Ekspresi Alternatif

Dengan menggunakan notasi persamaan (5.3) kita dapat menuliskan kembali himpunan kabur pada contoh 5.2, 5.3, dan 5.5 sebagai berikut:

- $\tilde{C} = 0.9/\text{Makassar} + 0.8/\text{Sungguminasa} + 0.6/\text{Maros}$
- $\tilde{A} = 0.1/0 + 0.3/1 + 0.7/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.3/5 + 0.1/6$
- $\tilde{B} = \int_{R^+} \frac{1}{1 + \left[\frac{x-50}{10} \right]^4} /x$

Himpunan kabur biasanya mempunyai nama-nama sesuai dengan sifat-sifat yang tampak pada pemakaian bahasa sehari-hari, seperti "besar", "sedang" atau "kecil" yang disebut *nilai bahasa* atau *label-label bahasa*. Jadi semesta dari X acapkali disebut *variabel bahasa*. Defenisi formal dari variabel bahasa dan nilai-nilai bahasa tidak diberikan di sini tetapi akan dibahas pada bagian khusus dalam diktat ini.

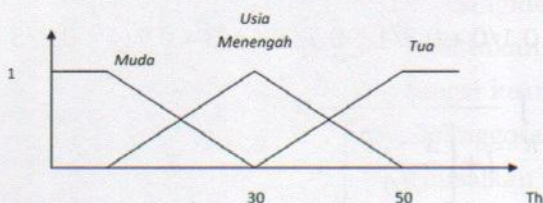
5.2.6 Variabel Bahasa dan Nilai-nilai Bahasa.

Contoh 5.6

Andaikan $X = \text{"usia"}$, maka kita dapat mendefenisikan himpunan kabur "muda", "usia menengah" dan "tua" yang

masing-masing dikarakterisasikan oleh FK: $\mu_{muda}(x)$, $\mu_{usia\ menengah}(x)$, dan $\mu_{tua}(x)$.

- Dalam contoh di atas, “usia” merupakan *variabel bahasa* yang dapat mempunyai bermacam-macam *nilai bahasa* seperti “muda”, “usia menengah”, dan “tua”.
- Jika “muda” diasumsikan nilai dari “usia” maka ia mempunyai ekspresi “usia adalah muda”, demikian juga untuk nilai-nilai lainnya.
- FK khas untuk nilai-nilai bahasa “muda”, “usia menengah”, dan “tua” dipaparkan pada gambar 4.2.



Gambar 5.2 FK Khas dari Nilai bahasa “Muda”, “Usia Menengah”, dan “Tua”

5.2.7 Pendukung (Support)

Definisi 4.2

Pendukung (support) dari himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah himpunan dari semua titik-titik x di X sehingga $\mu_{\tilde{A}}(x) > 0$.

$$\text{Support}(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_{\tilde{A}}(x) > 0\} \quad (5.4)$$

Contoh 5.7

Support dari himpunan kabur A pada contoh 1.4 adalah:

$$\text{Support}(\tilde{A}) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

5.2.8 Inti (Core)

Definisi 5.3.

Inti (Core) dari himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah himpunan semua titik-titik x di X sehingga $\mu_A(x) = 1$

$$\text{Core}(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_A(x) = 1\}$$

(5.5)

Contoh 5.8

- Inti (core) dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.3 adalah $\text{core}(\tilde{A}) = \{3\}$.
- Inti (core) dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.4 adalah $\text{core}(\tilde{A}) = \emptyset$

5.2.9 Normalitas

Definisi 5.4

Himpunan kabur A normal jika intinya tidak kosong. Dengan kata lain, selalu ada titik $x \in X$ sehingga $\mu_A(x) = 1$.

Contoh 5.9

- Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.3 adalah normal.
- Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.4 adalah tidak normal.

5.2.10 Titik Silang (Crossover Point)

Definisi 5.5.

Titik Silang (Crossover Point) dari himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah titik $x \in X$ sedemikian hingga $\mu_A(x) = 0.5$.

$$\text{Crossover}(\tilde{A}) = \{x \mid \mu_A(x) = 0.5\} \quad (5.6)$$

Contoh 5.10

- Titik silang dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.3 adalah $\text{crossover}(\tilde{A}) = \{\}$.
- Titik silang dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.4 adalah $\text{crossover}(\tilde{A}) = \{2\}$.

5.2.11 Titik Tunggal (Fuzzy Singleton)

Definisi 5.6

Himpunan kabur yang supportnya tunggal $x \in X$ dan $\mu_A(x) = 1$ disebut titik tunggal(fuzzy singleton).

5.2.12 α -cut, α -cut kuat

Definisi 5.7.

- α -cut atau himpunan α -level dari himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah himpunan klasik yang didefenisikan oleh:

$$\tilde{A}_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (5.7)$$

- α -cut kuat atau himpunan α -level kuat didefenisikan oleh:

$$\tilde{A}'_{\alpha} = \{x \mid \mu_A(x) > \alpha\}$$

$$(5.8)$$

Contoh 5.11

a. $\text{Core}(\tilde{A}) = \tilde{A}_1$

b. $\text{Suport}(\tilde{A}) = \tilde{A}'_0$

Contoh 5.12

a. 0,5-cut dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.4 adalah $\tilde{A}_{0,5} = \{2, 3, 4, 5\}$.

b. 0,5-cut kuat dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.4 adalah $\tilde{A}'_{0,5} = \{3, 4, 5\}$.

5.2.13 Convexity (kekonveksan)

Definisi 5.8

Himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah konveks jika dan hanya jika untuk sebarang $x_1, x_2 \in X$ dan sebarang $\lambda \in [0,1]$ berlaku:

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq \min\{\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)\}$$

$$(5.9)$$

Definisi 5.9

$\tilde{A}$ konveks jika semua himpunan α -level adalah konveks.

Definisi 5.10

Himpunan klasik C di R^n adalah konveks jika dan hanya jika untuk dua titik $x_1 \in C$ dan $x_2 \in C$, kombinasi kompleknya $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ masih di C , dengan $0 \leq \lambda \leq 1$.

Karena kekonveksan dari himpunan-himpunan (crisp) level $\tilde{A}_\alpha$ berakibat $\tilde{A}_\alpha$ digambar satu segmen garis.

Catatan:

Defenisi kekonveksan dari himpunan kabur tidak seketat defenisi kekonveksan suatu fungsi. Untuk pembanding, defenisi kekonveksan dari fungsi $f(x)$ adalah:

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2) \quad (5.10)$$

5.2.14 Bilangan Kabur (Fuzzy Number)

Definisi 5.11

Bilangan Kabur (Fuzzy Number) $\tilde{A}$ adalah himpunan kabur dalam semesta bilangan real R yang memenuhi kondisi kenormalan dan kekonveksan.

- Himpunan kabur yang paling banyak digunakan dalam literatur memenuhi kondisi kenormalan dan kekonveksan, sehingga bilangan kabur merupakan tipe himpunan kabur yang paling dasar.

Contoh 5.13

- Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 4.3 merupakan “bilangan bulat kabur di sekitar 3” atau $\tilde{3}$.
- Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 4.4 bukan bilangan kabur karena tidak normal.

5.2.15 Lebar Pita (Bandwidths) dari Himpunan Kabur Normal dan Konveks

Definisi 5.12

Untuk himpunan kabur normal dan konveks, lebar pita atau lebar didefinisikan sebagai jarak antara dua titik *crossover* tunggal.

$$\text{Lebar}(\tilde{A}) = |x_2 - x_1|,$$

$$\text{dengan } \mu_A(x_1) = \mu_A(x_2) = 0,5$$

Contoh 5.14

Diketahui bilangan kabur real sekitar 5 yang didefinisikan sebagai:

$$\tilde{5} = \begin{cases} 0 & \text{jika } x \leq 3 \\ \frac{x-3}{2} & \text{jika } 3 \leq x \leq 5 \\ \frac{9-x}{4} & \text{jika } 5 \leq x \leq 9 \\ 0 & \text{jika } x \geq 9 \end{cases}$$

Maka lebar ($\tilde{5}$) adalah $|4-7| = 3$, karena $\mu_{\tilde{5}}(4) = \mu_{\tilde{5}}(7) = 0.5$

5.2.16 Simetri (Symmetry)

Definisi 5.13

Himpunan kabur $\tilde{A}$ dikatakan simetri jika FK-nya simetri terhadap suatu titik $x = c$, atau

$$\mu_A(c+x) = \mu_A(c-x) \text{ untuk semua } x \in X$$

Contoh 5.15

- a. Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.3 adalah simetris terhadap $x = 3$.

- b. Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada contoh 1.4 adalah tidak simetris.

5.2.17 Terbuka kiri (Open Left), Terbuka kanan (Open Right), dan Tertutup (Closed)

Definisi 5.14

Himpunan kabur $\tilde{A}$ dikatakan:

a. terbuka kiri jika $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 0$,

b. terbuka kanan jika $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = 0$ dan

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 1$$

c. tertutup jika $\lim_{x \rightarrow -\infty} \mu_A(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \mu_A(x) = 0$.

Contoh 5.16

Himpunan kabur “muda” pada gambar 1.2 adalah terbuka kiri, himpunan kabur “tua” adalah terbuka kanan, dan himpunan kabur “usia menengah” adalah tertutup.

5.2.18 Kardinalitas

Definisi 5.15

Misalkan $\tilde{A}$ adalah himpunan kabur finit, maka:

a. kardinalitas $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai

$$|\tilde{A}| = \sum_{x \in X} \mu_A(x),$$

b. kardinalitas relatif dari $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai

$$\|\tilde{A}\| = \frac{|\tilde{A}|}{|X|}.$$

Catatan:

Kardinalitas relatif dari himpunan kabur bergantung pada kardinalitas semesta. Jadi anda harus memilih semesta yang sama jika anda ingin membandingkan himpunan kabur-himpunan kabur melalui kardinalitas relatif.

Contoh 5.17

a. Kardinalitas himpunan kabur “tipe rumah yang sesuai untuk keluarga dengan 4 anggota” dari contoh 5.4 adalah:

$$|\tilde{A}| = 0,2 + 0,5 + 0,8 + 1 + 0,7 + 0,3 = 3,5$$

b. Kardinalitas relatifnya adalah

$$\|\tilde{A}\| = \frac{3,5}{10} = 0,35$$

Kardinalitas relatif dapat diinterpretasikan sebagai “bobot elemen-elemen $\tilde{A}$ ” dari elemen-elemen X , dibobot dengan derajat-derajat anggota dalam $\tilde{A}$.

Untuk x yang infinit, kardinalitas didefinisikan dengan

$$|\tilde{A}| = \int_X \mu_{\tilde{A}}(x) dx, \quad |\tilde{A}| \text{ tidak selalu ada.}$$

5.3 Latihan

1. Diketahui himpunan kabur $\tilde{A}$ = “bilangan bulat sekitar 10” yang didefinisikan sebagai $\tilde{A} = 0.1/7 + 0.5/8 + 0.8/9$

+ $1/10 + 0.8/11 + 0.5/12 + 0.1/13$. Tentukan semua himpunan α -level dari $\tilde{A}$.

2. Untuk himpunan kabur $\tilde{A}$ pada latihan nomor 1, tentukan kardinalitas dan kardinalitas relatifnya.
3. Misalkan $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$. Hitunglah kardinalitas dan kardinalitas relatif dari himpunan kabur berikut
 - a. $\tilde{B} = \{(2, 0.4), (3, 0.6), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.6), (8, 0.4)\}$
 - b. $\tilde{C} = \{(2, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (7, 0.6)\}$
4. Hitunglah lebar pita dari himpunan kabur $\tilde{A}$ pada latihan nomor 1.
5. Tentukan support dan inti (core) dari himpunan-himpunan kabur berikut:
 - a. Himpunan kabur $\tilde{A}$ pada latihan nomor 1,
 - b. Himpunan kabur $\tilde{B}$ pada latihan nomor 3.
6. Sebutkan dua macam variabel bahasa beserta nilai-nilai bahasanya.
7. Definisikan bilangan bulat kabur sekitar 5 dengan lebar pita sama dengan 4.

BAB 6



FUNGSI KEANGGOTAAN HIMPUNAN KABUR

6.1. Fungsi Keanggotaan

Misalkan X ruang semesta, maka himpunan kabur $\tilde{A}$ di dalam X dinyatakan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_A(x)) \mid x \in X\}$$

dengan $\mu_A(x)$ disebut **Fungsi Keanggotaan(FK)** untuk $\tilde{A}$ atau derajat keanggotaan dari x di dalam $\tilde{A}$. FK memetakan setiap unsur dari X ke ruang keanggotaan M ;

$$M = \{m / 0 \leq m \leq 1\}$$

Contoh 6.1

Misalkan $X = \{\text{Maros, Makassar, Sungguminasa}\}$ adalah himpunan kota-kota di Sulawesi Selatan yang dapat dipilih untuk tempat tinggal. Suatu himpunan kabur $\tilde{C}$ di dalam X didefinisikan sebagai “kota yang layak untuk tempat tinggal” dan dituliskan dalam pasangan berurutan sebagai berikut:

$$\tilde{C} = \{(\text{Maros}, 0.8), (\text{Makassar}, 0.9), (\text{Sungguminasa}, 0.6)\}$$

Maka FK untuk $\tilde{C}$ adalah:

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \begin{cases} 0.8, & \text{jika } x = \text{Maros} \\ 0.9, & \text{jika } x = \text{Makassar} \\ 0.6, & \text{jika } x = \text{Sungguminasa} \end{cases}$$

Dalam contoh ini semesta X berupa variabel diskrit dan memuat obyek-obyek tak terurut, yakni tiga kota di Sulawesi Selatan. Derajat keanggotaan yang didaftar di atas cukup subyektif, yakni setiap orang dapat berbeda dalam menetapkan derajat keanggotaan dari anggota-anggota di dalam X , tetapi nilai-nilai tersebut tetap mencerminkan tingkat kesukaan.

Contoh 6.2

Misalkan $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ adalah “himpunan dari banyaknya anak dalam suatu keluarga”. Suatu himpunan kabur $\tilde{B}$ di dalam X menyatakan “banyaknya anak yang ideal di dalam suatu keluarga” dan dinyatakan dalam pasangan berurutan sebagai berikut:

$$\tilde{B} = \{ (0, 0.1), (1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1) \}$$

Dalam contoh ini, semesta X berupa variabel diskrit dengan obyek-obyek terurut. Derajat keanggotaan dari himpunan kabur $\tilde{B}$ jelaslah merupakan ukuran yang subyektif.

Contoh 6.3

Misalkan $X = R^+$ adalah himpunan usia manusia yang mungkin untuk kehidupan. Maka himpunan kabur $\tilde{A}$ didefinisikan sebagai “usia sekitar 50 tahun” dan dituliskan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(x, \mu_B(x)) \mid x \in X\}, \text{ dengan}$$

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-50}{10}\right)^4} \text{ sebagai fungsi}$$

keanggotaan (FK).

Dari contoh-contoh di atas, jelaslah bahwa konstruksi dari himpunan kabur tergantung pada dua hal: (i) identifikasi semesta pembicaraan yang cocok dan (ii) spesifikasi dari suatu fungsi keanggotaan yang sesuai. Spesifikasi fungsi keanggotaan bersifat subyektif, artinya pendefinisian fungsi keanggotaan untuk suatu konsep himpunan kabur dapat berbeda oleh setiap orang. Subyektifitas tersebut berasal dari perbedaan individu dalam mengekspresikan konsep-konsep abstrak. Oleh karena itu subyektivitas dan ketidakacakan dari himpunan kabur adalah perbedaan utama antara belajar himpunan kabur dan teori probabilitas, yang cenderung melakukan perlakuan subyektif dari gejala (fenomena) acak.

6.2. Formulasi Fungsi Keanggotaan (FK) dan Parameterisasi

Berikut dibicarakan kelas-kelas fungsi parameter yang digunakan untuk mendefinisikan FK berdimensi satu dan dua. Penurunan FK memperhatikan input-input dan parameternya. Penurunan-penurunan ini sangat penting di dalam pembahasan Sistem Inferensi Kabur (SIK) untuk memperoleh pemetaan input/output yang diinginkan.

6.2.1. Fungsi Keanggotaan Berdimensi Satu

6.2.1.1. Fungsi Keanggotaan Segitiga

Fungsi keanggotaan segitiga dispesifikasikan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$ sebagai berikut:

$$\text{Segitiga}(x; a, b, c) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jika } a \leq x \leq b \\ \frac{c-x}{c-b}, & \text{jika } b \leq x \leq c \\ 0, & \text{jika } x \geq c \end{cases}$$

Dengan menggunakan operator *max* dan *min*, maka ekspresi lain dari fungsi keanggotaan segitiga, yaitu :

$$\text{Segitiga}(x; a, b, c) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, \frac{c-x}{c-b} \right), 0 \right]$$

Parameter-parameter $\{a, b, c\}$ dengan $a < b < c$ menentukan koordinat-koordinat untuk titik-titik sudut FK segitiga.

Contoh 6.4

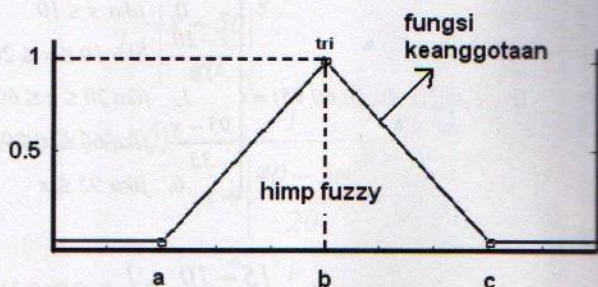
Diketahui FK segitiga yang didefenisikan oleh:

$$\text{Segitiga}(x; 20, 60, 80) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq 20 \\ \frac{x-20}{40}, & \text{jika } 20 \leq x \leq 60 \\ \frac{80-x}{20}, & \text{jika } 60 \leq x \leq 80 \\ 0, & \text{jika } x \geq 80 \end{cases}$$

Maka:

$$\bullet \text{ segitiga}(30; 20, 60, 80) = \frac{30-20}{40} = \frac{1}{4} \text{ atau}$$

• segitiga (30; 20, 60, 80) = $\max \left[\min \left(\frac{30-20}{60-20}, \frac{80-30}{80-60} \right), 0 \right] = \frac{1}{2}$



Gambar 6.1. Fungsi Keanggotaan Segitiga

6.2.1.2. Fungsi Keanggotaan Trapesoid

Fungsi keanggotaan trapesoid dispesifikasikan dengan 4 parameter $\{a, b, c, d\}$ sebagai berikut:

$$\text{Trapesoid}(x; a, b, c, d) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jika } a \leq x \leq b \\ 1, & \text{jika } b \leq x \leq c \\ \frac{d-x}{d-c}, & \text{jika } c \leq x \leq d \\ 0, & \text{jika } d \leq x \end{cases}$$

Dengan menggunakan operator *max* dan *min*, maka ekspresi lain dari fungsi keanggotaan trapesoid adalah:

$$\text{Trapesoid}(x; a, b, c, d) = \max \left[\min \left(\frac{x-a}{b-a}, 1, \frac{d-x}{d-c} \right), 0 \right]$$

Parameter-parameter $\{a, b, c, d\}$ dengan $a < b \leq c < d$ menentukan koordinat-koordinat untuk keempat titik sudut FK Trapesoid.

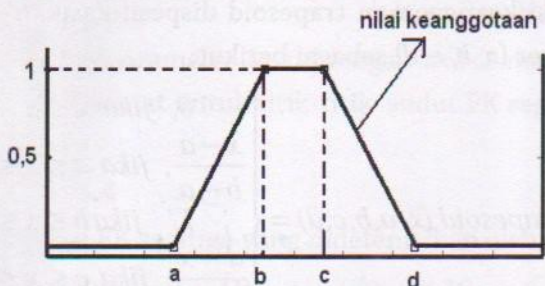
Contoh 6.5

Diketahui fungsi keanggotaan trapezoid yang didefinisikan oleh:

$$\text{Trapezoid}(x; 10, 20, 60, 95) = \begin{cases} 0, & \text{jika } x \leq 10 \\ \frac{x-10}{10}, & \text{jika } 10 \leq x \leq 20 \\ 1, & \text{jika } 20 \leq x \leq 60 \\ \frac{95-x}{35}, & \text{jika } 60 \leq x \leq 95 \\ 0, & \text{jika } 95 \leq x \end{cases}$$

Maka:

- $\text{Trapezoid}(15; 10, 20, 60, 95) = \frac{15-10}{10} = \frac{1}{2} = 0,50$
- $\text{Trapezoid}(75; 10, 20, 60, 95) = \frac{95-75}{35} = \frac{4}{7} = 0,57$



Gambar 6.2. Fungsi Keanggotaan Trapezoid

6.2.1.3 Fungsi Keanggotaan Bell-Shaped

FK Bell-Shaped dispesifikasikan oleh tiga parameter $\{a, b, c\}$ sebagai berikut:

$$\text{Bell}(x; a, b, c) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b}}, \text{ dengan } b \text{ selalu positif.}$$

Contoh 6.6.

Diketahui FK *Bell-Shaped* yang didefinisikan oleh *Bell*

$$(x; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{x-50}{20} \right|^8}, \text{ maka:}$$

$$\bullet \text{ Bell}(40; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{40-50}{20} \right|^8} = 0,996$$

$$\bullet \text{ Bell}(50; 20, 4, 50) = \frac{1}{1 + \left| \frac{50-50}{20} \right|^8} = 1.$$

6.2.1.4. Fungsi Keanggotaan Gauss

Fungsi Keanggotaan Gauss dispesifikasikan oleh dua parameter $\{c, \sigma\}$ sebagai berikut:

$$\text{Gauss}(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-c}{\sigma} \right)^2}$$

FK Gauss ditentukan oleh parameter c dan σ , parameter c menentukan pusat dari FK dan σ menentukan lebar dari FK.

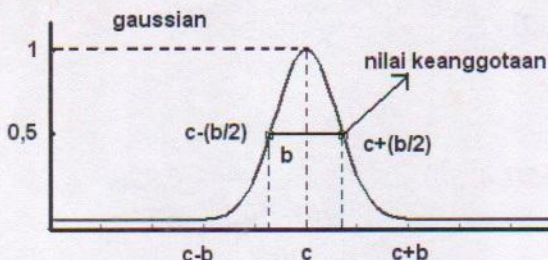
Contoh 6.7

Diketahui FK Gauss yang didefinisikan oleh *Gauss* $(x;$

$$50, 20) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-50}{20} \right)^2}, \text{ maka}$$

$$\bullet \text{ Gauss}(70; 50, 20) = e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{70-50}{20} \right)^2} = 0,61$$

- $Gauss(50; 50, 20) = e^{-\frac{1}{2}(\frac{50-50}{20})^2} = 1.$



Gambar 6.3. Fungsi Keanggotaan Gauss ($x; 50, 20$)

6.2.1.5 Fungsi Keanggotaan Sigmoid

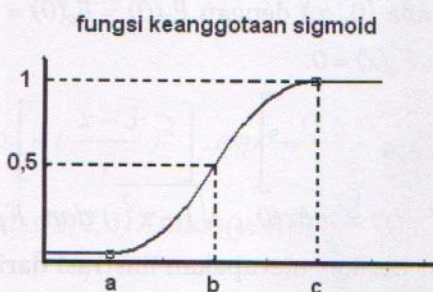
Fungsi Keanggotaan Sigmoid didefinisikan oleh:

$$Sig(x; a, c) = \frac{1}{1 + \exp[-a(x - c)]}$$

dengan a adalah kemiringan pada titik crossover $x = c$

Berdasarkan tanda pada parameter a , FK Sigmoid bersifat *terbuka kanan* atau *terbuka kiri*. Ini sangat cocok untuk menyajikan konsep-konsep seperti “sangat besar” atau “sangat negatif”. Fungsi Sigmoid semacam ini digunakan sebagai fungsi aktivasi dari jaringan kerja saraf buatan. Oleh karena itu, untuk jaringan kerja saraf disimulasikan dengan sistim tingkah laku dari sistem inferensi kabur. Berikut akan ditampilkan bagaimana menyusun FK tutup melalui fungsi Sigmoid.

Contoh 6.8



Gambar 6.4 FK Tutup dan FK Asimetris Berdasarkan pada Fungsi Sigmoid

Perhatikan gambar 6.4,

- (a) memperlihatkan dua FK Sigmoid terbuka kanan, yakni $y_1 = \text{sig}(x; 1, -5)$ dan $y_2 = \text{sig}(x; 2, 5)$;
- (b) FK tutup asimetris yang dapat diperoleh dengan mengambil $|y_1 - y_2|$;
- (c) memperlihatkan satu FK Sigmoid terbuka kanan $y_1 = \text{sig}(x; 1, -5)$ dan FK Sigmoid terbuka kiri $y_3 = \text{sig}(x; -2, 5)$;
- (d) cara lain untuk membentuk FK tutup asimetris, yaitu $y_1 \cdot y_2$.

6.2.1.6 Fungsi Keanggotaan Left-Right

FK Left-Right atau FK L-R dispesifikasikan oleh 3 parameter $\{\alpha, \beta, c\}$;

$$L-R(x; c, \alpha, \beta) = \begin{cases} F_L\left(\frac{c-x}{\alpha}\right); & x \leq c \\ F_R\left(\frac{x-c}{\beta}\right); & x \geq c \end{cases}$$

dengan $F_L(x)$ dan $F_R(x)$ adalah fungsi monoton turun yang terdefinisi pada $[0, \infty)$ dengan $F_L(0) = F_R(0) = 1$ dan $\lim_{x \rightarrow \infty} F_L(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_R(x) = 0$.

Contoh 6.9

Misalkan $F_L(x) = \max(0, \sqrt{1-x^2})$ dan $F_R(x) = e^{-|x|^3}$, maka gambar berikut merupakan ilustrasi dari FK L-R yang dispesifikasikan oleh $L-R(x; 65, 60, 10)$, maka:

$$\bullet L-R(60; 65, 60, 10) = \max \left[0, \sqrt{1 - \left(\frac{65-60}{60} \right)^2} \right] = 0,997,$$

$$\bullet L-R(65; 65, 60, 10) = \max \left[0, \sqrt{1 - \left(\frac{65-65}{60} \right)^2} \right] =$$

$$e^{-\left| \frac{65-65}{10} \right|^3} = 1,$$

$$\bullet L-R(75; 65, 60, 10) = e^{-\left| \frac{75-65}{10} \right|^3} = 0,37.$$

6.2.2 Fungsi Keanggotaan Berdimensi Dua

Misalkan himpunan kabur $\tilde{A} = "(x, y) \text{ dekat } (3,4)"$ dan FK dari $\tilde{A}$ didefinisikan oleh:

$$\mu_A(x, y) = \exp \left[- \left(\frac{x-3}{2} \right)^2 - (y-4)^2 \right]$$

maka FK dari $\tilde{A}$ di atas berdimensi dua dan merupakan komposit karena merupakan hasil kali dari dua FK Gauss seperti berikut:

$$\begin{aligned}
 \mu_A(x, y) &= \exp \left[- \left(\frac{x-3}{2} \right)^2 - (y-4)^2 \right] \\
 &= \exp \left[- \left(\frac{x-3}{2} \right)^2 \right] \cdot \exp \left[- \frac{(y-4)^2}{1} \right] \\
 &= \text{Gauss}(x; 2, 3) \cdot \text{Gauss}(y; 4, 1)
 \end{aligned}$$

Himpunan kabur $\tilde{A}$ di atas, dapat pula dinyatakan sebagai dua pernyataan yang dihubungkan dengan koneksi DAN: “ x dekat 3 DAN y dekat 4” dimana pernyataan pertama didefenisikan oleh:

$$\mu_{\text{dekat } 3}(x) = \text{Gauss}(x; 3, 2),$$

dan pernyataan kedua didefenisikan oleh:

$$\mu_{\text{dekat } 4}(y) = \text{Gauss}(y; 4, 1)$$

Jadi perkalian dari dua FK ini digunakan untuk menginterpretasikan operasi DAN dari dua pernyataan ini.

Tetapi, jika fungsi keanggotaan suatu himpunan kabur $\tilde{A}$ didefenisikan oleh:

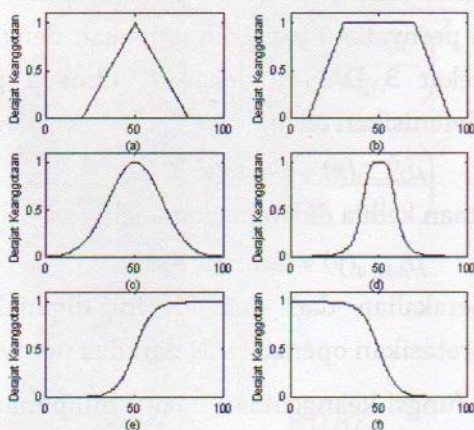
$$\mu_A(x, y) = \frac{1}{1 + |x-3||y-4|^{2,5}},$$

maka FK tersebut bukan bentuk komposit. FK dimensi dua komposit biasanya dibentuk dari dua pernyataan yang digabung dengan koneksi (penghubung) “DAN” atau “ATAU”. Operasi DAN dan ATAU pada himpunan kabur masing-masing bersesuaian dengan operator *min* dan *max*.

Contoh 6.10

Misal $\text{trap}(x) = \text{trapesoid}(x; -6, -2, 2, 6)$ dan $\text{trap}(y) = \text{trapesoid}(y; -6, -2, 2, 6)$ merupakan dua FK trapesoid pada X dan Y . Setelah menggunakan operasi $\max$ dan $\min$, kita mempunyai FK berdimensi dua pada $X \times Y$.

Secara keseluruhan fungsi keanggotaan dari himpunan kabur dapat dilihat pada gambar berikut:



Gambar 6.4. Kurva fungsi keanggotaan,

- (a). $\text{segitiga}(x; 20, 50, 80)$, (b). $\text{trapesium}(x; 10, 30, 70, 90)$,
(c). $\text{gaussian}(x; 50, 15)$, (d). $\text{bell}(x; 10, 2, 50)$, (e). $\text{sigmoid}(x; 0.2, 50)$ dan (f). $\text{sigmoid}(x; -0.2, 50)$.

6.2.3 Turunan FK terhadap Parameter-Parameter

Untuk mengetahui turunan dari FK terhadap argumen-argumennya dan parameter-parameternya, dibawah ini diberikan tabel turunan dari FK Gauss dan FK Bell.

- Untuk FK Gauss,

Misalkan $y = \text{Gauss}(x; c, \sigma) = e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{\sigma}\right)^2}$, maka turunan parsial FK Gauss y terhadap argumen x dan parameter c dan σ adalah sebagai berikut:

$$\frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{x-c}{\sigma^2} y, \quad \frac{\delta y}{\delta \sigma} = -\frac{(x-c)^2}{\sigma^3} y, \quad \frac{\delta y}{\delta c} = -\frac{x-c}{\sigma^2} y$$

- Untuk FK Bell,

Misalkan $y = \text{Bell}(x; a, b, c) = \frac{l}{1 + \left|\frac{x-c}{a}\right|^{2b}}$, maka turunan

FK Bell y terhadap argumen x dan parameter a , b , dan c adalah:

$$\bullet \frac{\delta y}{\delta x} = -\frac{2b}{a} \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b-1} \cdot \frac{l}{y^2};$$

$$\bullet \frac{\delta y}{\delta a} = \frac{2b}{a} \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b} \cdot \frac{l}{y^2};$$

$$\bullet \frac{\delta y}{\delta b} = -2 \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b} \ln \left| \frac{x-c}{a} \right| \cdot \frac{l}{y^2};$$

$$\bullet \frac{\delta y}{\delta c} = \frac{2b}{a} \left| \frac{x-c}{a} \right|^{2b-1} \cdot \frac{l}{y^2}$$

6.3 LATIHAN

1. Tentukan nilai dari fungsi keanggotaan segitiga berikut:
 - a. segitiga (40; 20, 60, 80)
 - b. segitiga (40; 10, 30, 70).

2. Tentukan nilai dari fungsi keanggotaan trapezoid berikut:
 - a. *Trapezoid* (30; 10, 20, 60, 95)
 - b. *Trapezoid* (30; 10, 30, 60, 95)
3. Tentukan nilai dari fungsi keanggotaan bell berikut:
 - a. *Bell* (30; 20, 4, 50)
 - b. *Bell* (30; 10, 2, 30).

BAB 7



OPERASI PADA HIMPUNAN KABUR

7.1 Operasi Dasar Himpunan Kabur

Gabungan (*union*), irisan (*intesection*) dan komplemen (*complement*) adalah operasi yang sangat mendasar pada himpunan tegas (biasa). Dengan mendasarkan pada tiga operasi ini, sejumlah identitas dapat diperlihatkan, seperti yang terlihat pada Tabel 7.1 berikut.

Tabel 7.1 Beberapa Identitas Dasar pada Himpunan Tegas

Misalkan A , B , dan C adalah himpunan-himpunan tegas, X adalah himpunan semesta, dan ϕ adalah himpunan kosong, maka	
Hukum kontradiksi	$A \cap A^c = \phi$
Hukum excluded	$A \cup A^c = X$
Idempoten	$A \cap A = A, A \cup A = A$
Involusi	$(A^c)^c = A$
Komutatif	$A \cap B = B \cap A, A \cup B = B \cup A$
Assosiatif	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Distributif	$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
Absorbsi	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$
Absorbsi dari komplemen	$A \cup (A^c \cap B) = A \cup B$ $A \cap (A^c \cup B) = A \cap B$
Hukum De Morgan	$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

Dalam himpunan kabur, juga dikenal adanya operasi gabungan, irisan, dan komplemen. Pendefinisian operasi gabungan, irisan, dan komplemen pada himpunan kabur pada mulanya dikemukakan oleh Zadeh dan sampai saat ini sudah banyak pendefinisian yang dikemukakan oleh pakar yang lain . Perlu diketahui bahwa konsep-konsep dari himpunan kabur merupakan suatu perluasan dari himpunan klasik. Oleh karena itu, himpunan tegas merupakan bentuk khusus dari himpunan kabur, sehingga semua konsep dan sifat yang berlaku untuk himpunan kabur, juga berlaku untuk himpunan tegas.

Sebelum membahas tiga operasi dasar pada himpunan kabur ini, pertama-tama didefenisikan ide dari “ketermuatan”, yang memainkan peranan penting dalam himpunan tegas (biasa) maupun himpunan kabur.

7.1.1 Ketermuatan (Subset)

Definisi 7.1

Himpunan kabur $\tilde{A}$ adalah termuat dalam himpunan kabur $\tilde{B}$ atau $\tilde{A}$ adalah subset $\tilde{B}$, atau $\tilde{A}$ lebih kecil atau sama dengan $\tilde{B}$ jika dan hanya jika $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ untuk semua x di X .

Dengan simbol,

$$\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \quad (7.1)$$

7.1.2 Gabungan (disjungsi)

Definisi 7.2

Gabungan dari dua himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan kabur $\tilde{C}$, ditulis $\tilde{C} = \tilde{A} \cup \tilde{B}$, atau $\tilde{C} = \tilde{A}$ atau $\tilde{B}$ dengan fungsi keanggotaan (FK):

$$\mu_C(x) = \max [\mu_A(x), \mu_B(x)] = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) \quad (7.2)$$

Contoh 7.1

Diketahui himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dalam semesta $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang masing-masing didefinisikan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

$$\tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\},$$

maka

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$$

7.1.3 Irisan (konjungsi)

Definisi 7.3

Irisan dari dua himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ adalah himpunan kabur $\tilde{C}$, ditulis $\tilde{C} = \tilde{A} \cap \tilde{B}$, atau $\tilde{C} = \tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dengan fungsi keanggotaan (FK):

$$\mu_{\tilde{C}}(x) = \min [\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (7.3)$$

Contoh 7.2

Untuk himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan seperti pada contoh 3.1, maka

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\}$$

7.1.4 Komplemen (Negasi)

Definisi 7.4

Komplemen dari himpunan kabur $\tilde{A}$, dilambangkan dengan $\tilde{A}^c$ didefinisikan sebagai:

$$\tilde{A}^c = \{(x, \mu_{\tilde{A}}^c(x)) / \mu_{\tilde{A}}^c(x) = 1 - \mu_{\tilde{A}}(x)\} \quad (7.4)$$

Contoh 7.3

Untuk himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ yang didefinisikan seperti pada contoh 6.1, maka

- $\tilde{A}^c = \{(1, 0.8), (2, 0.5), (3, 0.2), (5, 0.3), (6, 0.7)\}$,
- $\tilde{B}^c = \{(1, 0.7), (2, 0.3), (4, 0.3), (5, 0.7), (6, 0.9)\}$

Gambar 7.2 mengilustrasikan ketiga operasi dasar himpunan kabur. Gambar 7.2 (a) mengilustrasikan dua himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$; Gambar 7.2 (b) adalah komplement dari $\tilde{A}$; Gambar 7.2 (c) adalah gabungan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$; Gambar 7.2 (d) adalah irisan dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$.

Dengan mempergunakan tiga operasi dasar himpunan kabur tersebut di atas, maka dapat diselidiki identitas yang mana saja pada tabel 6.1 di atas yang juga dipenuhi oleh himpunan kabur.

Contoh 7.4

Diketahui himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dalam semesta $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ yang masing-masing didefinisikan sebagai:

$$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

$$\tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\},$$

Tunjukkan bahwa:

$$\text{a. } (\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$$

$$\text{b. } \tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$$

Jawab:

$$\text{a. Diketahui: } \tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

$$\tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\},$$

maka

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

$$(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \{(1, 0.7), (2, 0.3), (5, 0.3), (6, 0.7)\},$$

(*)

$$\tilde{A}^c = \{(1, 0.8), (2, 0.5), (3, 0.2), (5, 0.3), (6, 0.7)\},$$

$$\tilde{B}^c = \{(1, 0.7), (2, 0.3), (4, 0.3), (5, 0.7), (6, 0.9)\},$$

$$A^c \cap B^c = \{(1, 0.7), (2, 0.3), (5, 0.3), (6, 0.7)\},$$

(**)

Dari Persamaan (*) dan (**) terbukti bahwa $(\tilde{A} \cup \tilde{B})^c = \tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$.

b. Diketahui: $\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\}$,

$$\tilde{B} = \{(1,0.3), (2,0.7), (3,1), (4,0.7), (5,0.3), (6,0.1)\},$$

maka:

$$(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\},$$

$$\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) =$$

$$\{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\} = \tilde{A}.$$

Jadi terbukti bahwa $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$.

Sebagai latihan, silahkan selidiki identitas-identitas yang lainnya.

Selanjutnya kita akan mendefinisikan operasi-operasi lain pada himpunan kabur yang juga merupakan generalisasi langsung dari himpunan biasa.

7.1.5 Perkalian (product) Cartesius dan Jumlah (co-product) Cartesius

Definisi 7.5

Misalkan himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ secara berturut-turut dalam semesta X dan Y . Perkalian (Product) Cartesius dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, dilambangkan dengan $\tilde{A} \times \tilde{B}$ adalah himpunan kabur dalam $X \times Y$ dengan fungsi keanggotaan:

$$\mu_{A \times B}(x,y) = \min [\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

$$(7.5)$$

Sedangkan Jumlah (*Co-Product*) Cartesius dari $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$, yang dilambangkan $\tilde{A} + \tilde{B}$ adalah himpunan kabur dengan fungsi kenggotaan:

$$\mu_{A+B}(x,y) = \max [\mu_A(x), \mu_B(y)]$$

$$(7.6)$$

Contoh 7.5

Diketahui himpunan kabur $\tilde{A} =$ "kota yang nyaman ditinggali" = { (Makassar, 0.8), (Sungguminasa, 0.6), (Maros, 0.4)} dan himpunan kabur $\tilde{B} =$ "banyak kamar tidur rumah yang cocok untuk keluarga 4 orang" = {(2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)}, maka:

$$\begin{aligned} \tilde{A} \times \tilde{B} = & \{[(\text{Makassar}, 2), 0.5], [(\text{Makassar}, 3), 0.8], \\ & [(\text{Makassar}, 4), 0.8], [(\text{Makassar}, 5), 0.7], \\ & [(\text{Makassar}, 6), 0.3], [(\text{Sungguminasa}, 2), 0.5], \\ & [(\text{Sungguminasa}, 3), 0.6], [(\text{Sungguminasa}, 4), 0.6], \\ & [(\text{Sungguminasa}, 5), 0.6], [(\text{Sungguminasa}, 6), 0.3], \\ & [(\text{Maros}, 2), 0.4], [(\text{Maros}, 3), 0.4], [(\text{Maros}, 4), \\ & 0.4], [(\text{Maros}, 5), 0.4], [(\text{Maros}, 6), 0.3]\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{A} + \tilde{B} = & \{[(\text{Makassar}, 2), 0.8], [(\text{Makassar}, 3), 0.8], \\ & [(\text{Makassar}, 4), 1], [(\text{Makassar}, 5), 0.8], \\ & [(\text{Makassar}, 6), 0.8], [(\text{Sungguminasa}, 2), 0.6], \\ & [(\text{Sungguminasa}, 3), 0.8], [(\text{Sungguminasa}, 4), 1], \\ & [(\text{Sungguminasa}, 5), 0.7], [(\text{Sungguminasa}, 6), 0.6], \\ & [(\text{Maros}, 2), 0.5], [(\text{Maros}, 3), 0.8], [(\text{Maros}, 4), 1], \\ & [(\text{Maros}, 5), 0.7], [(\text{Maros}, 6), 0.4]\}. \end{aligned}$$

7.2 Pendefinisian Lain Operasi Gabungan, Irisan, dan Komplemen Himpunan Kabur

Walaupun operator-operator dasar untuk komplemen, gabungan, dan irisan himpunan kabur yang dikemukakan di atas memiliki sifat-sifat yang lebih teliti, namun operator tersebut bukan hanya satu-satunya cara untuk mendefinisikan operasi-operasi yang logis dan konsisten pada himpunan kabur. Berikut diuraikan definisi bentuk lain tentang operator komplemen, irisan, dan gabungan dari himpunan kabur.

7.2.1 Komplemen Kabur

Operator komplemen kabur adalah fungsi kontinu $N : [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang memenuhi persyaratan aksiomatik berikut:

$$(i) N(0) = 1 \text{ dan } N(1) = 0 \text{ (batas)}$$

$$(7.7)$$

$$(ii) N(a) \geq N(b) \text{ jika } a \leq b \text{ (kemonotonan)}$$

Dua syarat ini merupakan persyaratan dasar tentang operator komplemen kabur. Persyaratan lain tentang involusi pada komplemen kabur adalah:

$$N(N(a)) = a \text{ (involusi)}$$

$$(7.8)$$

yang menjamin bahwa komplemen ganda dari suatu himpunan kabur adalah himpunan itu sendiri.

7.2.1.1 Komplemen Sugeno (Sugeno's Complement)

Kelas operator komplemen kabur Sugeno didefinisikan oleh:

$$N_s(a) = \frac{1-a}{1+sa}, \quad (7.9)$$

dengan s adalah suatu parameter yang lebih besar dari -1 dan a adalah derajat keanggotaan x pada himpunan kabur semula. Untuk setiap nilai dari s , kita peroleh operator komplemen kabur khusus. Misalnya, untuk $s = 0$, maka $N_s(a) = 1 - a$ yang sama dengan pendefinisian operasi komplemen dasar, untuk $s = 1$, maka $N_s(a) = \frac{1-a}{1+a}$. Gambar

7.3 (a) mengilustrasikan kelas operator komplemen Sugeno dengan mengambil nilai s yang berbeda-beda.

(a) Komplemen Sugeno

(b) Komplemen Yager

Contoh 7.6

Diketahui himpunan kabur

$$\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

maka komplemen dari $\tilde{A}$ menurut operator komplemen

Sugeno untuk $s = 1$, $N_1(a) = \frac{1-a}{1+a}$ adalah $\tilde{A}^c = \{(1, 0.67), (2, 0.33), (3, 0.11), (5, 0.18), (6, 0.54)\}$

7.2.1.2 Komplemen Yager (Yager's Complement)

Kelas lainnya dari komplemen kabur adalah komplemen Yager yang didefinisikan oleh:

$$N_w(a) = (1-a^w)^{1/w} \quad (7.10)$$

dengan w adalah parameter positif dan a adalah derajat keanggotaan x pada himpunan kabur semula. Gambar 6.3 (b)

memperlihatkan kelas komplemen Yager untuk nilai w yang bervariasi.

Contoh 7.6

Diketahui himpunan kabur $\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\}$, maka komplemen dari $\tilde{A}$ menurut operator komplemen Yager untuk $w = 1/2$, $N_{1/2}(a) = (1-a^{1/2})^2$ adalah $\tilde{A}^c = \{(1, 0.31), (2, 0.09), (3, 0.01), (5, 0.03), (6, 0.20)\}$.

Perlu dicatat bahwa dalam hal persyaratan involusi, kedua komplemen Sugeno maupun Yager adalah simetris sekitar 45 derajat terhadap garis lurus yang menghubungkan $(0,0)$ dan $(1,1)$. Persyaratan aksiomatik involusi untuk komplemen kabur tidak menentukan $N(\cdot)$ secara unik. Bagaimanapun, $N(a) = 1-a$ (komplemen dasar kabur) jika syarat berikut dimasukkan, yaitu:

$$\mu_A(x_1) - \mu_A(x_2) = \mu_{A^c}(x_2) - \mu_{A^c}(x_1) \quad (7.11)$$

Persyaratan ini menjamin bahwa perubahan dalam nilai keanggotaan dalam A akan mempengaruhi keanggotaan dalam A^c . Persyaratan ini bersama-sama dengan persyaratan dasar (terbatas dan kemonotonan) untuk komplemen kabur menghasilkan $N(a) = 1-a$, yang secara otomatis memenuhi persyaratan involusi.

7.2.2. Irisan Kabur

Kelas irisan kabur dari dua himpunan kabur $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dispesifikan oleh fungsi $t : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$, yang membandingkan dua derajat keanggotaan sebagai berikut:

$$\mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) = t[\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)] = \mu_{\tilde{A}}(x) * \mu_{\tilde{B}}(x) \quad (7.12)$$

dengan $*$ adalah operator biner untuk fungsi t . Kelas dari operator irisan kabur ini, biasanya merefer pada operator t -norm (*Triangular norm*), dengan persyaratan dasar berikut.

t -norm

Definisi 7.6

Suatu operator T -norm adalah fungsi dua variabel t ($\dots$) yang memenuhi:

$$(i) \ t(0,0) = 0; \ t(a,1) = t(1,a) = a$$

(batas)

$$(ii) \ t(a,b) \leq t(c,d) \text{ jika } a \leq c \text{ dan } b \leq d$$

(monotonisitas)

$$(iii) \ t(a,b) = t(b,a)$$

(komutatifitas)

$$(iv) \ t(a, t(b,c)) = t(t(a,b), c)$$

(assosiatifitas)

Persyaratan pertama menentukan generalisasi yang tepat untuk himpunan tegas, karena himpunan tegas merupakan himpunan bagian dari himpunan kabur. Persyaratan kedua mengakibatkan bahwa suatu penurunan dalam nilai keanggotaan dalam A atau B tidak

mengakibatkan kenaikan nilai keanggotaan dalam $A \cap B$. Persyaratan ketiga mengindikasikan bahwa operator t -norm adalah tidak berbeda terhadap urutan dari himpunan kabur yang dioperasikan. Akhirnya, persyaratan keempat membolehkan kita untuk mengambil irisan dari sembarang bilangan dalam himpunan dari sembarang urutan. Berikut dijelaskan empat operator t -norm yang paling sering ditemui.

Operator-operator t -norm

Ada enam operator t -norm yang paling sering digunakan adalah:

a. Minimum : $t_{\min}(a,b) = \min(a,b) = a \wedge b$

b. Hasil kali aljabar : $t_{ap}(a,b) = ab$

c. Hasil kali terbatas : $t_{bp}(a,b) = \max[0, (a+b-1)] = 0 \vee (a+b-1)$

d. Hasil kali Einstein : $t_{ep}(a,b) = \frac{a \cdot b}{2 - [a + b - ab]}$

e. Hasil kali Hamacher : $t_{hp}(a,b) = \frac{a \cdot b}{a + b - ab}$

g. Hasil kali drastis : $t_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{jika } b=1 \\ b, & \text{jika } a=1 \\ 0, & \text{jika } a,b < 1 \end{cases}$

Contoh 7.7

Diketahui:

$$\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\},$$

$$\tilde{B} = \{(1,0.3), (2,0.7), (3,1), (4,0.7), (5,0.3), (6,0.1)\},$$

maka

- a. Dengan menggunakan operator *t-norm minimum* (irisan dasar/klasik) maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \min(a, b)) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 0.7), (5, 0.3), (6, 0.1)\},$$

- b. Dengan menggunakan operator *t-norm hasil kali aljabar* maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, ab) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1, 0.06), (2, 0.35), (3, 0.80), (4, 0.70), (5, 0.21), (6, 0.03)\},$$

- c. Dengan menggunakan operator *T-norm hasil kali terbatas* maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \max[0, (a + b - 1)]) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(2, 0.2), (3, 0.8), (4, 0.7)\},$$

- d. Dengan menggunakan operator *t-norm hasil kali Einstein* maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \frac{ab}{2 - [a + b - ab]}) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1, 0.04), (2, 0.30), (3, 0.80), (4, 0.70), (5, 0.17), (6, 0.02)\},$$

- e. Dengan menggunakan operator *t-norm hasil kali Hamacher* maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(x, \frac{a.b}{a + b - ab}) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(1, 0.14), (2, 0.41), (3, 0.80), (4, 0.70), (5, 0.27), (6, 0.08)\}.$$

g. Dengan menggunakan operator *t-norm* hasil kali drastis maka:

$$\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{(3, 0.8), (4, 0.7)\},$$

Dari contoh di atas terlihat bahwa semua hasil operasi *t-norm* terbatas atas oleh hasil operasi min dan terbatas bawah oleh hasil operasi perkalian drastic, yaitu:

$$t_{dp}(a,b) \leq t(a,b) \leq \min(a,b) \quad (7.13)$$

7.2.3 Gabungan Kabur

Seperti irisan kabur, kelas operator gabungan kabur dispesifikkan oleh fungsi $S: [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ yang didefinisikan oleh:

$$\mu_{A \cup B}(x) = s(\mu_A(x), \mu_B(x)) = \mu_A(x) \pm \mu_B(x)$$

dimana $\pm$ adalah operator biner untuk fungsi s . Kelas dari operator gabungan kabur ini, sering merefer pada operator *t-conorm* (*s-norm*), dengan persyaratan berikut.

t-conorm (s-norm)

Definisi 7.7

Suatu operator *t-conorm* (*s-norm*) adalah fungsi dua variabel $S(...)$ yang memenuhi:

- (i) $s(1,1) = 1$; $s(0,a) = s(a,0) = a$ (terbatas)
- (ii) $s(a,b) \leq s(c,d)$ jika $a \leq c$ dan $b \leq d$ (monotonisitas)
- (iii) $s(a,b) = s(b,a)$ (komutatifitas)
- (iv) $s(a,s(b,c)) = s(s(a,b),c)$ (assosiatifitas)

Pertimbangan (justifikasi) dari persyaratan dasar ini sama dengan persyaratan pada operator t-norm.

Operator-operator t-conorm (s-norm)

Berkaitan dengan empat operator t-norm pada bagian sebelumnya, kita mempunyai empat operator t-conorm (s-norm) berikut:

a. Maximum : $s_{max}(a,b) = \max(a,b) = a \vee b$

b. jumlah aljabar : $s_{as}(a,b) = a+b-ab$

c. Jumlah terbatas : $s_{bs}(a,b) = \min(1, a+b) = 1 \wedge (a+b)$

d. Jumlah Einstein : $s_{es}(a,b) = \frac{a+b}{1+ab}$

e. Jumlah Hamacher : $s_{hs}(a,b) = \frac{a+b-2ab}{1-ab}$

f. Jumlah drastis : $s_{dp}(a,b) = \begin{cases} a, & \text{jika } b=0 \\ b, & \text{jika } a=0 \\ 1, & \text{jika } a,b>0 \end{cases}$

Contoh 7.8

Diketahui:

$$\tilde{A} = \{(1,0.2), (2,0.5), (3,0.8), (4,1), (5,0.7), (6,0.3)\},$$

$$\tilde{B} = \{(1,0.3), (2,0.7), (3,1), (4,0.7), (5,0.3), (6,0.1)\}, \text{ maka}$$

- a. Dengan menggunakan operator s-norm maximum (gabungan dasar/klasik) maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \max(a,b)) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.3), (2, 0.7), (3, 1), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\},$$

- b. Dengan menggunakan operator s-norm jumlah aljabar maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, a+b-ab) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.44), (2, 0.85), (3, 1), (4, 1), (5, 0.79), (6, 0.37)\},$$

- c. Dengan menggunakan operator *S-norm jumlah terbatas* maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \min [1, a + b]) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.5), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 0.4)\},$$

- d. Dengan menggunakan operator *s-norm jumlah Einstein* maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \frac{a+b}{1+ab}) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.47), (2, 0.89), (3, 1), (4, 1), (5, 0.83), (6, 0.39)\},$$

- e. Dengan menggunakan operator *s-norm jumlah Hamacher* maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(x, \frac{a+b-2ab}{1-ab}) / a = \mu_A(x) ; b = \mu_B(x)\}$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1, 0.40), (2, 0.77), (3, 1), (4, 1), (5, 0.73), (6, 0.35)\},$$

- f. Dengan menggunakan operator *s-norm jumlah drastis* maka:

$$\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{(1,1), (2,1), (3,1), (4, 1), (5, 1), (6, 1)\}.$$

Dari contoh di atas terlihat bahwa semua hasil operasi *s-norm* terbatas atas oleh hasil operasi *jumlah drastis* dan terbatas bawah oleh hasil operasi *max*, yaitu:

$$\max(a,b) \leq s(a,b) \leq s_{ds}(a,b)$$

$$(7.14)$$

Secara keseluruhan operasi pada himpunan fuzzy dapat dioperasikan dengan beberapa macam seperti pada tabel berikut yaitu:

No.	Operasi	Ekspresi operator	Keterangan
1	Equality	$\mu_A(u) = \mu_B(u)$	$u \in U$
2	Union	$\mu_{A \cup B}(u) = \max\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$	$u \in U$
3	Intersection	$\mu_{A \cap B}(u) = \min\{\mu_A(u), \mu_B(u)\}$	$u \in U$
4	Complement	$\mu_A(u) = 1 - \mu_A(u)$	$u \in U$
5	Normalitation	$\mu_{\text{norm}(A)}(u) = \mu_A(u) / \max(\mu_A(u))$	$u \in U$
6	Concentration	$\mu_{\text{con}A}(u) = (\mu_A(u))^2$	$u \in U$
7	Dilatation	$\mu_{\text{dila}A}(u) = (\mu_A(u))^{0.5}$	$u \in U$
8	Intensification	$\mu_{\text{int}(A)}(u) = \begin{cases} 2(\mu_A(u))^2 \\ 1 - 2(1 - \mu_A(u))^2 \end{cases}$	
9	Algebraic product	$\mu_{A \cdot B}(u) = \mu_A(u) \cdot \mu_B(u)$	$u \in U$
10	Bounded sum	$\mu_{A+B}(u) = \min\{1, \mu_A(u) + \mu_B(u)\}$	$u \in U$
11	Bounded product	$\mu_{A \times B}(u) = \max\{0, \mu_A(u) + \mu_B(u) - 1\}$	$u \in U$
12	Drastic product	$\mu_{A \cdot B}(u) = \begin{cases} \mu_A(u) & \text{untuk } \mu_B(u) = 1 \\ \mu_B(u) & \text{untuk } \mu_A(u) = 1 \\ 0 & \text{untuk } \mu_A(u), \mu_B(u) < 1 \end{cases}$	

7.2.4 Hukum DeMorgan Tergeneralisasi

Teorema 7.1.

t -norm dan t -conorm (s -norm) adalah dual yang mendukung generalisasi dari hukum DeMorgan:

$$(i) \ t(a,b) = N(s(N(a), N(b))),$$

$$(ii) \ s(a,b) = N(s(N(a), N(b))),$$

dimana $N(,)$ adalah operator komplemen kabur. Jika kita menggunakan $*$ dan $\pm$ secara berturut-turut untuk operasi t -norm dan t -conorm (s -norm), maka persamaan sebelumnya dapat ditulis sebagai:

$$(i) a * b = N(N(a) \pm N(b)),$$

$$(ii) a \pm b = N(N(a) * N(b)).$$

Di sini akan diberikan contoh pembuktian teorema 1 dengan mengambil pasangan dual operator *hasil kali dan jumlah aljabar*, serta komplemen dasar/klasik.

$$(i) a * b = N(N(a) \pm N(b))$$

$$= N((1-a) \pm (1-b))$$

$$= N((1-a) + (1-b) - (1-a)(1-b))$$

$$= N(2-a-b-1+a+b-ab)$$

$$= N(1-ab)$$

$$= 1 - (1-ab) = ab \text{ (Terbukti)}$$

$$(ii) a \pm b = N(N(a) * N(b))$$

$$= N((1-a) * (1-b))$$

$$= N((1-a) (1-b))$$

$$= N(1-a-b+ab)$$

$$= 1 - (1-a-b+ab)$$

$$= a+b-ab \text{ (Terbukti)}$$

Sebagai latihan, silahkan buktikan teorema 1 untuk pasangan (dual) operator t -norm dan s -norm yang lain.

Jadi, untuk operator t -norm yang diberikan, kita selalu dapat menemukan operator t -conorm (s -norm) yang bersesuaian melalui generalisasi hukum DeMorgan, dan sebaliknya. Pada kenyataannya enam pasangan operator t -norm dan s -norm secara berturut-turut adalah *dual* dalam generalisasi hukum DeMorgan.

7.3 *t*-norm dan *t*-conorm (*s*-norm) Terparameter

Beberapa parameterisasi *t*-norm dan dual *t*-conorm telah ditentukan pada bagian yang lalu, seperti Yager, Dubois dan Prade, Schweizer dan Sklar, dan Sugeno. Sebagai contoh, operator Schweizer dan Sklar dapat dinyatakan sebagai

$$t_{ss}(a,b,p) = [\max\{0, (a^p + b^p - 1)\}]^{-1/p}$$

$$s_{ss}(a,b,p) = 1 - [\max\{0, ((1-a^p) + (1-b^p) - 1)\}]^{-1/p}$$

Dapat dilihat bahwa:

$$\lim_{p \rightarrow 0} t_{ss}(a,b,p) = ab,$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} t_{ss}(a,b,p) = \min(a,b),$$

yang berkorespondensi dengan dual yang lebih umum menggunakan *t*-norm untuk operasi DAN kabur.

Untuk memberikan ide yang umum bagaimana parameter *p* mempengaruhi operator *t*-norm dan *t*-conorm, gambar 6.4 (a) memperlihatkan fungsi keanggotaan khusus dari himpunan kabur *A* dan *B*; gambar 6.4 (b) dan gambar 6.4 (c) adalah secara berturut-turut $t_{ss}(a,b,p)$ dan $s_{ss}(a,b,p)$ dengan $p = \infty$ (solid line), $p = 1$ (dashed line), $p = 0$ (dotted line) dan $p = -1$ (dash-dotted line). Perlu dicatat bahwa bentuk Bell dari fungsi keanggotaan *A* dan *B* dalam gambar 6.4 (a) didefinisikan sebagai berikut:

$$\mu_A(x) = \text{bell}(x; -5, 2, 7.5) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x+5}{5}\right)^4},$$

$$\mu_B(x) = \text{bell}(x; 5, 1, 5) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x-5}{5}\right)^2}.$$

Untuk kelengkapan, jenis lain dari parameterisasi *t*-norm dan *t*-conorm diberikan berikut:

Yager: untuk $q > 0$

$$\begin{cases} T_y(a,b,q) = 1 - \min\{1, [(1-a)^q + (1-b)^q]^{1/q}\} \\ S_y(a,b,q) = \min\{1, (a^q + b^q)^{1/q}\} \end{cases}$$

Dubois dan Prade: untuk $a \in [0,1]$

$$\begin{cases} T_{DP}(a,b,\alpha) = ab/\max\{a,b,\alpha\} \\ S_{DP}(a,b,\alpha) = [a+b-ab-\min\{a,b,(1-\alpha)\}]/\max\{1-a, 1-b, \alpha\} \end{cases}$$

Hamacher: untuk $\gamma > 0$

$$\begin{cases} T_H(a,b,\gamma) = ab/[\gamma + (1-\gamma)(a+b-ab)] \\ S_H(a,b,\gamma) = [a+b+(\gamma-2)ab]/[1+(\gamma-1)ab] \end{cases}$$

Frank: untuk $a > 0$

$$\begin{cases} T_F(a,b,s) = \log_s[1 + (s^a - 1)(s^b - 1)/(s - 1)] \\ S_F(a,b,s) = 1 - \log_s[1 + (s^{1-a} - 1)(s^{1-b} - 1)/(s - 1)] \end{cases}$$

Sugeno: untuk $\lambda \geq -1$

$$\begin{cases} T_S(a,b,\lambda) = \max\{0, (\lambda+1)(a+b-1) - \lambda ab\} \\ S_S(a,b,\lambda) = \max\{1, a+b-\lambda ab\} \end{cases}$$

Dombi: untuk $\lambda > 0$

$$\begin{cases} T_D(a,b,\lambda) = \frac{1}{1 + [(a^{-1} - 1)^\lambda + (b^{-1} - 1)^\lambda]^{1/\lambda}} \\ S_D(a,b,\lambda) = \frac{1}{1 + [(a^{-1} - 1)^{-\lambda} + (b^{-1} - 1)^{-\lambda}]^{-1/\lambda}} \end{cases}$$

7.4 Latihan

1. Diketahui himpunan semesta $X = \{5, 10, 15, 20, \dots, 50\}$ yang menyatakan temperatur di suatu daerah (dalam derajat Celcius). Selanjutnya diberikan pula himpunan-himpunan kabur $\tilde{A}$, $\tilde{B}$, $\tilde{C}$, dan $\tilde{D}$ beserta nilai-nilai fungsi keanggotaannya masing-masing seperti tercantum dalam tabel.

$\tilde{A}$ menyatakan kategori “dingin”

$\tilde{B}$ menyatakan kategori “sejuk”

$\tilde{C}$ menyatakan kategori “panas”

$\tilde{D}$ menyatakan kategori “sekitar 23°C ”.

X	Nilai fungsi keanggotaan			
	$\tilde{A}$	$\tilde{B}$	$\tilde{C}$	$\tilde{D}$
5	1	0.1	0	0.1
10	1	0.2	0	0.4
15	0.9	0.8	0.1	0.8
20	0.7	1	0.2	1
25	0.5	1	0.4	1
30	0.3	0.7	0.7	0.8
35	0.1	0.4	0.8	0.4
40	0	0	1	0
45	0	0	1	0
50	0	0	1	0

Berdasarkan tabel di atas, tentukanlah:

a. $\tilde{A}^c$

b. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$

c. $\tilde{A} \cup \tilde{B}$

d. $\tilde{B} \cap (\tilde{C} \cup \tilde{D})$

e. $\tilde{C} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{D})$

f. $\tilde{D} \setminus (\tilde{B} \cup \tilde{C})$

g. Apakah $\tilde{B} \subseteq \tilde{D}$?

2. Misalkan $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ dan himpunan kabur $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ masing-masing didefinisikan:

$$\tilde{B} = \{(2, 0.4), (3, 0.6), (4, 0.8), (5, 1), (6, 0.8), (7, 0.6), (8, 0.4)\}$$

$$\tilde{C} = \{(2, 0.4), (4, 0.8), (5, 1), (7, 0.6)\}$$

Hitunglah irisan dan gabungan antara $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ dengan operator dasar (klasik).

3. Diketahui $\tilde{A}$ adalah “rumah yang ideal untuk keluarga 4 orang” yang didefinisikan dengan $\tilde{A} = \{(1, 0.2), (2, 0.5), (3, 0.8), (4, 1), (5, 0.7), (6, 0.3)\}$ dan $\tilde{B}$ adalah “tipe rumah besar” yang didefinisikan dengan $\tilde{B} = \{(3, 0.2), (4, 0.4), (5, 0.6), (6, 0.8), (7, 1), (8, 1)\}$. Jika $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada semesta $X = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$, tentukan:

a. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$

b. $\tilde{A} \cup \tilde{B}$

c. $\tilde{A}^c \cap \tilde{B}^c$

d. $\tilde{A}^c \cup \tilde{B}^c$

4. Untuk $\tilde{B}$ dan $\tilde{C}$ pada latihan nomor 2, hitunglah:

- jumlah aljabar
- jumlah terbatas
- jumlah drastis
- jumlah Einstein
- jumlah Hamacher.

5. Untuk $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada latihan nomor 3, hitunglah:

- | | |
|------------------------|-------------------------|
| a. hasil kali aljabar | d. hasil kali Einstein |
| b. hasil kali terbatas | e. hasil kali Hamacher. |

c. hasil kali drastic

6. Untuk $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ pada latihan nomor 3, hitunglah:

- komplemen Sugeno untuk masing-masing $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dengan mengambil $s = 2$
- komplemen Yager untuk masing-masing $\tilde{A}$ dan $\tilde{B}$ dengan mengambil $w = \frac{1}{2}$.

7. Misalkan $*$ operator t -norm, $\pm$ operator t -conorm (s -norm), dan N operator komplemen klasik. Buktikan hukum De'Morgan (i) $a * b = N(N(a) \pm N(b))$ dan (ii) $a \pm b = N(N(a) * N(b))$, dengan mengambil pasangan dual operator:

- hasil kali terbatas dan jumlah terbatas
- hasil kali drastis dan jumlah drastis
- hasil kali Einstein dan jumlah Einstein
- hasil kali Hamacher dan jumlah Hamacher.

BAB 8



APLIKASI TEORI KABUR

Teori kabur termasuk disiplin ilmu yang relatif masih muda dan masih berkembang terus. Zimmermann (1996) mencatat bahwa perkembangan teori kabur ini lebih berfokus pada pematapan metodologi penelitian dan prasarana pendukungnya, serta penerapannya di berbagai bidang yang baru. Sementara itu aplikasinya dalam berbagai bidang telah mengalami banyak penyempurnaan, misalnya dengan menerapkan algoritma genetic dan atau jaringan saraf pada sistem itu.

Semakin disadari bahwa penyelesaian masalah-masalah dunia nyata yang rumit dewasa ini memerlukan suatu sistem cerdas yang dapat memanfaatkan pengetahuan, teknik dan metodologi dari berbagai sumber. Sistem cerdas itu diharapkan dapat berfungsi seperti kecerdasan manusiawi, yang dapat belajar dan menyesuaikan diri dengan lingkungannya serta mengambil keputusan-keputusan yang paling tepat. Berbagai cara telah dikembangkan untuk menciptakan sistem cerdas semacam itu. Salah satunya adalah yang dipelopori oleh Zadeh sendiri dengan konsepnya yang diberi nama komputasi lunak (*soft computing*). Komputasi lunak adalah sistem komputasi yang memberi tempat pada ketidaktepatan dan kekaburan dunia nyata dan memakai otak manusia sebagai model utamanya. Dalam komputasi lunak metodologi dari berbagai sumber dipadukan: logika kabur, jaringan saraf,

algoritma genetik teori peluang dan teori khaos. Usaha untuk menciptakan sistem yang semakin mendekati kemampuan otak manusia itu dikembangkan terus oleh Zadeh yang belum lama ini (1999) mempublikasikan konsepnya mengenai *komputasi dengan kata-kata* (*computing with words*). Sebagai suatu metodologi, komputasi dengan kata-kata memberikan suatu landasan hgs-teori komputasi persepsi (*computational theory of perceptions*) Manipulasi persepsi memegang peranan penting dalam pembentukan pengetahuan dan pengambilan keputusan yang dilakukan oleh manusia dalam keadaan yang serba tidak tepat, tidak pasti, dan kabur. Pengembangan teori komputasi persepsi diharapkan dapat memberikan landasan bagi penciptaan sistem-sistem cerdas yang semakin menyamai kecerdasan manusiawi. Pengembangan sistem cerdas secara sinergis semacam itu saat ini masih dalam taraf permulaan dan oleh karenanya masih memerlukan penelitian yang luas dan intensif.

Wang (1997) melihat, teori kabur (*fuzzy theory*) yaitu semua teori yang mempergunakan himpunan kabur sebagai dasarnya dapat dikelompokkan dalam beberapa bagian. Di samping logika kabur (dan kecerdasan buatan), teori ini juga mencakup matematika kabur (aritmatika kabur, analisis kabur topologi kabur, aljabar kabur, dsb), sistem kabur (kendali kabur, pengenalan pola, pengolahan citra dsb), pengambilan keputusan kabur (program linear kabur, masalah optimalisasi), serta ketidakpastian dan informasi (ukuran ketidakpastian, teori kemungkinan) Sebagian terbesar aplikasi teori kabur tersebut berkonsentrasi pada sistem kabur, khususnya sistem kendali kabur. Masih diperlukan

pengembangan lebih lanjut aspek teoretis dalam teori kabur itu agar aplikasinya dalam macam-macam bidang tersebut menjadi semakin kokoh dan meyakinkan.

Pengembangan logika kabur masih menghadapi banyak kendala dan tantangan, tetapi bagaimanapun kemampuannya untuk menangani dunia nyata yang penuh dengan kekaburan, masih jauh lebih baik daripada logika dwinilai yang tradisional, sebab "logika kabur saat ini merupakan salah satu solusi pating sederhana apabila yang tersedia hanyalah informasi yang tidak tepat, subjektif, dan tidak pasti" (Ragot & Lamotte, 1993). Tidaklah berlebihan apabila para ahli meramalkan teori kabur mempunyai masa depan yang cerah, dan mempunyai potensi yang besar untuk memberikan kontribusi dalam pengembangan ilmu dan teknologi dalam abad kedua puluh satu ini.

8.1 Aplikasi dalam Sistem Kendali Kabur

Sistem kendali kabur telah diimplementasikan dalam berbagai peralatan, baik barang-barang konsumen (mesin cuci, alat pendingin udara, kamera, almari es, dll), sarana-prasarana transportasi (mobil, kereta api, lampu lalu-lintas, dll), maupun alat-alat industri (pabrik semen, perusahaan air minum, dll).



Ebrahim H. Mamdani
(London University)

Implementasi pertama terjadi pada tahun 1974 ketika Ebrahim H. Mamdani dan kawan-kawannya di *Queen Mary College, University of London*, berhasil menerapkan logika kabur dan penalaran hampiran dalam suatu sistem kendali pada mesin uap². Penerapan tersebut kemudian menjadi model bagi penerapan-penerapan lainnya. Pada tahun 1978, Lauritz P. Holmblad dan Jens-Jorgen Østergaard berhasil menciptakan sistem kendali kabur pertama yang dapat berfungsi secara penuh dalam bidang industri, yaitu untuk mengontrol proses pembuatan semen di pabrik semen F. L. Smidth & Co di Denmark³.

Pada Tahun 1980, Michio Sugeno dkk mengimplemen-tasikan sistem kendali kabur yang pertama di Jepang, yaitu dalam pengendalian proses pemurnian air yang didukung oleh perusahaan *Fuji Electric*.⁴ Dan pada tahun 1987, Shoji Miyamoto dan Seiji Yasunobu dari perusahaan *Hitachi* menyelesaikan proyek besar mereka berupa kereta api

²Mamdani, E. "Applications of Fuzzy Set Theory to Control Systems: A Survey", Dalam: Gupta, M. et al. (Eds). *Fuzzy Automata and Decision Processes* Amsterdam: North-Holland. 1977.

³Holmblad, L.P. and Østergaard, J.J. "**Control of a Cement Klin by Fuzzy Logic**". Dalam Gupta M.M. and Sanchez, E. (Eds)' *Fuzzy Infomration and Decision Processes* Amsterdam, North Holland, 1982

⁴Sugeno, M. ei al. "Application of Fuzzy Reasoning, to the Water Purification Process." Dalam: Sugeno, M. (Ed). *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Amsterdam: North-Holland. 1985.

bawah tanah di Sendai (Jepang) yang dioperasikan secara otomatis dengan sistem kendali kabur⁵.

Mesin cuci pakaian termasuk peralatan konsumen pertama yang memanfaatkan penalaran hampiran. Mesin tersebut, yang pertama kali diproduksi sekitar tahun 1990 oleh perusahaan *Matsushita Electric Industrial Company* di Jepang, dapat mengatur secara otomatis aktivitas pencuciannya berdasarkan banyaknya (beratnya) pakaian yang dicuci, tingkat kekotoran pakaian, dan jenis kotorannya. Ia dilengkapi dengan suatu sensor untuk mengukur beratnya pakaian yang akan dicuci (sangat ringan, agak ringan, ringan, agak berat, berat, sangat berat). Kemudian selama berlangsungnya proses pencucian suatu sensor optik mengirimkan berkas cahaya melalui air yang sudah tercampur kotoran pakaian untuk mengukur tingkat kekotoran pakaian itu (sangat kotor, kotor, agak kotor, agak bersih, bersih, sangat bersih), dan jenis kotorannya (debu, minyak, campuran). Hasil pengukuran sensor-sensor itu dikirimkan ke suatu mikroprosesor yang telah dimuati dengan kaidah-kaidah inferensi penalaran hampiran, yang mengaitkan beratnya, kotornya, dan jenis kotoran pada pakaian itu dengan banyaknya air yang harus dipakai (tanpa, sedikit, agak banyak, banyak air) serta kecepatan putaran mesin yang harus dilakukan (sangat cepat, agak cepat, cepat, agak lambat, lambat, berhenti). Mikroprosesor itu kemudian mengolah masukan-masukan itu dan menghasilkan kesimpulan (tegas) yang dilaksanakan oleh

⁵Yasunobu, S. and Shoji Miyamoto. "Automatic Train Operation System by Predictive Fuzzy Control." Dalam: Sugeno, M. (Ed). *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Amsterdam: North-Holland. 1985.

mesin tersebut berkaitan dengan banyaknya air dan kecepatan putaran mesinnya.

Pada tahun 1990 itu juga sebuah pabrik elektronika memasarkan produk televisi yang menggunakan penalaran hampiran untuk mengatur kualitas gambar yang ditampilkannya. Parameter-parameter kualitas gambar yang dikontrol adalah kontras, kecerahan, modulasi kecepatan, dan ketajaman, sedangkan parameter-parameter masukannya adalah terangnya ruangan dan jarak penonton dari pesawat televisi itu. Nilai linguistik untuk variabel "terangnya ruangan" ada empat buah, yaitu terang sekali, terang, agak gelap, gelap. sedangkan untuk variabel "jarak penonton dari pesawat televisi" ada tiga buah, yaitu jauh, sedang, dekat. Untuk variabel keluaran ada tujuh buah nilai, yaitu besar sekali, agak besar. Besar, tetap, agak kecil, kecil, kecil sekali. Contoh aturan yang dipakai misalnya: "Jika ruangan terang sekali dan penonton berada jauh dari pesawat televisi, maka kontras besar sekali" atau "Jika ruangan agak gelap dan penonton berada dekat dengan pesawat televisi, maka ketajaman agak kecil." Terangnya ruangan diukur dengan bantuan sebuah sensor cahaya, dan jarak penonton dihitung dari jarak *remote control* yang dipakai penonton itu ke pesawat televisi. Proses pengaturan parameter-parameter pesawat televisi tersebut dilakukan setiap 50 milidetik.

Kamera *Canon H800* dilengkapi dengan suatu mikroprosesor yang bermuatan 13 aturan kabur untuk mengatur fokus dan penarikan lensanya secara otomatis. Sensor elektronisnya mengukur tingkat kecerahan dari obyek yang akan difoto. Berdasarkan tingkat kecerahan itu

(alat tersebut dapat mengenali 12 tingkat kecerahan), mikroprosesor menentukan fokus dan pembukaan lensa kamera tersebut. *Video Camcorder Sanyo FVC-880* hanya dimuati dengan 9 aturan kabur untuk mengatur ketajaman pengambilan gambarnya secara otomatis.

Pabrik *General Motors* memproduksi mobil yang mempergunakan pengaturan kecepatan berbasis logika kabur. Perusahaan mobil *Nissan* telah mempatenkan sistem rem mobil anti-gelincir dan system pengendalian kecepatan yang juga bekerja atas dasar penalaran hampiran. Perusahaan *Yamaichi Securities* mempergunakan program komputer dengan logika kabur untuk melindungi pasar modal dari gejolak perilaku perekonomian yang mungkin terjadi. Perusahaan *Omron Electronics* menyediakan jasa bagi lebih dari sepuluh ribu karyawan dari berbagai perusahaan besar di Jepang untuk memantau kesehatan mereka secara teliti atas dasar sistem diagnosa hampiran yang diperlengkapi dengan lebih dari lima ratus kaidah.

Jepang menduduki peringkat teratas dalam keberhasilannya menciptakan peralatan-peralatan yang berkerja atas dasar logika kabur dan diproduksi dalam bentuk peralatan konsumen maupun peralatan industri. Kosko (1993) melaporkan keberhasilan tersebut yang sebagian (kecil) daripadanya disajikan dalam tabel berikut:

Tabel 8.1 Daftar Produk yang berbasis logika Kabur

Nama Perusahaan	Peralatan Yang Diproduksi	Fungsi Logika Kabur
Sharp	Lemari es	Mengatur waktu pendinginan dan pencairan berdasarkan banyaknya dan jenisnya makanan yang disimpan di dalamnya.
	Microwave	Mengatur waktu dan cara memasak berdasarkan jenis makanan dan volumenya
Matsushita	Mesin cuci piring	Mengatur putaran mesin serta cara pencucian berdasarkan banyaknya barang yang dicuci dan jenis kotorannya.
	Mesin pengering pakaian	Mengatur waktu dan cara pengeringan pakaian berdasarkan banyaknya pakaian dan jenis bahannya.
	Alat pemasak nasi	Mengatur waktu dan cara memasak berdasarkan banyaknya nasi dan temperaturnya.
	Alat penghisap debu	Mengatur cara penghisapan berdasarkan volume debu dan jenis lantai.
Canon	Camera dan Video Camcorder	Mengatur fokus dan pintu lensa berdasarkan jarak obyek dan terangnya sinar di sekeliling obyek itu.
	Mesin Fotocopy	Mengatur voltase drum berdasarkan kerapatan gambar, suhu, dan kelembaban.
	Televisi	Mengatur warna, kecerahan, volume

Dewasa ini teknologi yang memanfaatkan sistem kendali kabur telah merambah ke seluruh dunia dan perdagangan berbagai macam peralatan konsumen maupun industri yang mempergunakan teknologi kabur dewasa ini

diperkirakan telah mencapai nilai lebih dari US\$ 8 milyar. Bisa dipastikan bahwa pemanfaatan dan volume perdagangan tersebut akan bertambah terus di tahun-tahun mendatang. Yang menarik dalam perkembangan logika kabur itu menurut Zadeh (1988) adalah bahwa aplikasinya yang paling penting dan paling nampak dewasa ini ternyata berada dalam bidang yang sama sekali tidak diantisipasi pada waktu logika kabur itu mulai dikembangkan, yaitu dalam bidang sistem kendali berbasis logika kabur

8.2 Aplikasi dalam Bidang-bidang Lainnya

Salah satu aplikasi teori kabur yang telah berkembang dengan cukup berhasil adalah dalam bidang komputer, khususnya yang berkaitan dengan pengelolaan informasi dan pengetahuan yang diusahakan sedekat mungkin dengan cara-cara manusiawi. Para ahli komputer telah berhasil mengembangkan berbagai hal berkaitan dengan itu, seperti misalnya basis data kabur (*fuzzy databases*), system penelusuran informasi kabur (*fuzzy information retrieval systems*), dan sistem pakar kabur (*fuzzy expert systems*). Dengan menggunakan teori kabur, informasi dan pengetahuan dapat dikelola dengan memakai bahasa manusiawi yang biasa. Maka sistem komputer yang memanfaatkan teori kabur menjadi lebih fleksibel dan lebih realistic.

Dalam bidang teknik, teori kabur tidak hanya dipakai dalam sistem kendali, tetapi juga dalam teknik sipil, teknik mesin, teknik listrik, teknik kimia, teknik nuklir, dan rancangan teknik (*engineering design*). Dalam bidang teknik sipil, suatu proyek biasanya bersifat unik, sehingga

penanganannya memerlukan pertimbangan dan keputusan yang unik pula dari para ahlinya. Misalnya, dalam menilai suatu bangunan (gedung, jalan raya, jembatan) diperlukan suatu penilaian kuantitatif dan subyektif terhadap bagian-bagian dan struktur bangunan itu, yang dapat dinyatakan dengan bilangan kabur yang sesuai dan dikalkulasikan dengan menggunakan aritmatika kabur. Dalam rancangan teknik, diperlukan suatu cara untuk mengekspresikan suatu desain yang harus dirancang sedekat mungkin dengan desain yang diinginkan. Teori kabur menyediakan bahasa yang cocok untuk keperluan para ahli rancangan itu. Parameter-parameter kabur dari desain yang diinginkan dinyatakan dalam himpunan-himpunan kabur yang sesuai untuk dikalkulasikan guna menghasilkan parameter-parameter kabur dari desain yang dirancang. Aritmatika kabur dan prinsip perluasan biasanya dipergunakan dalam kalkulasi itu.

Dalam ilmu ekonomi, teori kabur telah dimanfaatkan secara cukup luas dalam bidang manajemen dan pengambilan keputusan. Berbagai masalah yang berkaitan dengan optimisasi, perencanaan, penjadwalan, dan pengambilan keputusan diselesaikan melalui riset operasi, pemrograman linear, dan pemrograman dinamik dengan pendekatan teori kabur. Dengan pendekatan ini teori-teori ekonomi menjadi lebih realistis dan lebih mampu untuk membuat ramalan-ramalan yang semakin tepat.

Ilmu-ilmu alam (fisika, kimia, biologi) dan matematika juga tidak ketinggalan memanfaatkan teori kabur untuk memperkembangkan dirinya. Dalam matematika, misalnya, telah dikembangkan cabang-cabang baru seperti aljabar

kabur, topologi kabur, graf kabur, geometri kabur, statistika kabur, ukuran kabur, dan sebagainya.

Teori kabur juga mempunyai potensi yang besar untuk dimanfaatkan dalam bidang psikologi mengingat bahwa bidang tersebut memakai banyak istilah-istilah kabur untuk mendeskripsikan kondisi manusiawi. Dari literatur yang ada sampai saat ini dapat disimpulkan bahwa agaknya potensi tersebut belum dikembangkan secara sepenuhnya. Diperkirakan bahwa tidak hanya teori kabur dapat memperkuat ilmu psikologi, tetapi juga sebaliknya ilmu psikologi akan banyak membantu untuk mengembangkan teori kabur di masa depan. Misalnya, bidang psikolinguistik yang menyelidiki penggunaan istilah-istilah linguistik dalam berbagai konteks yang berlain, pasti akan sangat membantu perkembangan teori kabur yang dalam aplikasinya selalu memerlukan pemahaman konsep konteks yang jelas.

DAFTAR PUSTAKA

- Holmblad, L.P. and Østergaard, J.J. "Control of a Cement Klin by Fuzzy Logic". Dalam Gupta M.M. and Sanchez, E. (Eds)' Fuzzy Infomration and Decision Processes Amsterdam, North Holland, 1982
- Mamdani, E. "Applications of Fuzzy Set Theory to Control Systems: A Survey", Dalam: Gupta, M. et al. (Eds). *Fuzzy Automata and Decision Processes* Amsterdam: North-Holland. 1977.
- Sri Kusumadewi, Hari Purnomo. 2010. *Aplikasi Logika Fuzzy*. Edisi 2. Graha Ilmu. Yogyakarta.
- Sugeno, M. ei al. "Application of Fuzzy Reasoning, to the Water Purification Process." Dalam: Sugeno, M. (Ed). *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Amsterdam: North-Holland. 1985.
- Susilo, F, SJ. 2006. *Himpunan & Logika Kabur Serta Aplikasinya*. Graha Ilmu. Yogyakarta.
- Toshiro Terano, Kiyoji Asai, Michio Sugeno, translated by Charles G. Aschmann. 1992. *Fuzzy Systems Theory and ITS Applications*. Academic Press, INC. London.
- Yasunobu, S. and Shoji Miyamoto. "Automatic Train Operation System by Predictive Fuzzy Control." Dalam: Sugeno, M. (Ed). *Industrial Applications of Fuzzy Control*. Amsterdam: North-Holland. 1985.
- Yen, J. and Langari, R. 1999. *Fuzzy Ligic. Intelligence, Control, and Information*. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall.
- Zadeh, L.A. 1995. "Discussion: Probability Theory and Fuzzy Logic are Complementary rather than Competitive." *Technometrics*, 37 (3): 271-276.

RIWAYAT HIDUP

Zainal Abidin dilahirkan di Kelurahan Meunasah Peukan Kota Sigli Kabupaten Pidie Propinsi Aceh, tanggal 15 Mei 1971, anak ke 6 dari 8 bersaudara pasangan Bapak Usman Syamsuddin (alm) dengan Ibu Ummi Salamah.

Pendidikan Dasar hingga Madrasah Aliyah ditempuh di kota kelahirannya yaitu SD No. 1 Peukan Pidie tamat tahun 1985, SMPN Pasi Rawa Sigli tamat tahun 1988, MAN 1 Sigli tamat tahun 1991. Selanjutnya, tahun 1992 hijrah ke ibu Kota Propinsi yaitu Banda Aceh untuk melanjutkan pendidikan S1 pada program studi Pendidikan matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Ar-Raniry dan tamat tahun 1997. Pada tahun 1999 mendapatkan kesempatan melanjutkan pendidikan magister pada program pascasarjana Universitas Negeri Malang dengan bantuan Beasiswa BPPS. Setelah itu mendapatkan kesempatan untuk melanjutkan pendidikan pada jenjang yang tertinggi atau terakhir yaitu program Doktor S3 pendidikan Matematika pada Program Pascasarjana UNESA Surabaya tahun 2007 dan diselesaikannya pada tahun 2012.

Setelah menyelesaikan pendidikan Magister Pendidikan Matematika diangkat menjadi dosen pada lembaga tempat ditempuhnya pendidikan S1 yaitu Fakultas Tarbiyah IAIN Ar-Raniry hingga sekarang (sekarang Fakultas Tarbiyah dan Keguruan UIN Ar-Raniry). Selama bekerja sebagai dosen pernah mernjabat sebagai sekretaris jurusan Pendidikan Matematika dan sebagai Ketua Laboratorium Komputer. Selain itu juga pernah bekerja sebagai TIM Ahli/Teknis Pendidikan Satker Pendidikan, Kesehatandan Gender BRR NAD-Nias; Ketua Bidang Akademik PPG LPTK Fakultas

Tarbiyah IAIN Ar-Raniry Banda Aceh; Sekretaris PPG LPTK FITK UIN Ar-Raniry Banda Aceh; Tim Konsultan Sekolah Unggul Dinas Pendidikan Aceh; dan Anggota Tim Monev PTS Kopertis Wilayah XIII Aceh.

Pada tahun 2004, menikah dengan seorang gadis kota tempatnya bekerja sebagai dosen, yaitu seorang gadis Magister Manajemen Pendidikan Islam dan sekarang telah menjadi seorang Doktor Manajemen Pendidikan Islam dan Dosen pada Instansi yang sama serta telah dikaruniai tiga orang putra dan putri yaitu putra pertama Muhammad Fathir Zaira (9 tahun), Alifa Nafila Zaira (7 tahun), dan yang bungsu Kalila Nuzulia Zaira (3 tahun).

Selama menjadi dosen telah melakukan beberapa penelitian baik secara mandiri maupun berkelompok serta menulis beberapa tulisan yang dimuat dalam jurnal dan juga dimuat pada *proceeding* diantaranya adalah: Penerapan Pendekatan Pembelajaran Langsung pada Mata Kuliah Pendidikan Matematika II Program D-2 PGMI Fakultas Tarbiyah IAIN Ar-Raniry; Pembelajaran Matematika SLTP dengan Pendekatan Realistik Mathematics Education (RME); Analisis Kesalahan Mahasiswa Dalam Menyelesaikan Soal-Soal Trigonometri Sebagai Prasyarat Kalkulus; Intuisi Mahasiswa Dalam Pemecahan Masalah Matematika Berdasarkan Gaya Kognitif; Intuisi Siswa dalam pemecahan masalah matematika Divergen berdasarkan gaya kognitif *Field Independent* dan *Field Dependent*. Sedangkan tulisan yang dimuat dalam jurnal dan *proceeding* di antaranya: RME: Suatu Alternatif Pembelajaran Matematika; Trigonometri dan Kalkulus I (Suatu studi tentang analisis kesalahan mahasiswa Jurusan/Prodi Pendidikan Matematika Fakultas Tarbiyah IAIN Ar-Raniry);

Matematika yang kita pelajari dan gunakan sekarang dibangun berdasarkan logika nilai benar dan nilai salah saja. Kalau kita lihat kenyataan yang ada dalam kehidupan sehari-hari dan dalam dunia nyata ini, banyak kejadian-kejadian dan peristiwa-peristiwa yang tidak hanya bisa diukur dengan nilai benar salah saja. Misalnya kondisi banyak tidaknya rambut seorang, kecepatan kendaraan, suhu panas atau dingin dan lain-lain. Konsep-konsep tersebut secara bahasa bemuansa kabur dan oleh karenanya berada di luar jangkauan matematika yang kita kenal saat ini sehingga sulit untuk menyusun perangkat untuk model konsep tersebut. Sejak lama manusia berusaha untuk mencari terobosan guna untuk menemukan cara untuk menangani konsep-konsep yang kabur. Namun setelah Lotfi Zadeh memperkenalkan konsep himpunan kabur (fuzzy set) pada tahun 1965 yang sempat menjadi kontroversial untuk merepresentasikan konsep-konsep yang bersifat kabur ini, Zadeh kemudian membangun konsep logika kabur (fuzzy logic) yang mendasari penalaran konsep-konsep kabur.

Setelah dipublikasikan dasar konsepnya oleh Zadeh, teori himpunan dan logika kabur mengalami perkembangan yang sangat pesat, tidak hanya teori saja melainkan aplikasinya pun mengalami perkembangan yang sangat pesat, baik dalam bidang matematika itu sendiri maupun dalam bidang-bidang lain. Aplikasi dalam bidang matematika diantaranya yaitu aritmetika kabur, aljabar kabur, analisis kabur, dan lain sebagainya. Sementara aplikasinya dalam bidang lain adalah dalam ilmu computer, teknik, ekonomi, kedokteran, psikologi, transportasi, dan lain sebagainya. Dewasa ini aplikasi dalam bidang lain sudah merambah dalam dunia industri dalam memproduksi barang-barang konsumen berbasis logika kabur, seperti mesin cuci, lemari es, televisi, kamera, mesin pendingin udara (AC), mobil, pesawat terbang, dan lain sebagainya.

Dalam buku ini akan dibahas materi-materi meliputi: Teori Himpunan, Relasi, fungsi, latar belakang teori kabur, terminology himpunan kabur, fungsi keanggotaan himpunan kabur, operasi-operasi himpunan kabur, dan aplikasi teori kabur.

diterbitkan oleh:



Arraniry Press

Jl. Lingkar Kampus Darussalam

Banda Aceh 23111

Telp. (0651) - 7552921

Fax. (0651) - 7552922

E-mail: arranirypress@yahoo.com

ISBN 978-979-3717-75-3

