

No. Reg: 201110000035706

LAPORAN PENELITIAN



EVOLUSI PERAMBATAN GELOMBANG MELALUI ANALISIS SEMI ANALITIK ORDE TINGGI PERSAMAAN KDV PADA PEMBANGKIT GELOMBANG EKSTRIM

Ketua Peneliti

Budi Azhari, M. Pd

NIDN: 2018038003

ID Peneliti: 201803800308552

Anggota:

Vina Apriliani, M.Si

NIDN : 2017049301

ID Peneliti : 201704930108001

Klaster	Penelitian Terapan Pengembangan Nasional
Bidang Ilmu Kajian	Terapan
Sumber Dana	DIPA UIN Ar-Raniry Tahun 2020

PUSAT PENELITIAN DAN PENERBITAN
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI AR-RANIRY BANDA ACEH
OKTOBER 2020

**LEMBARAN IDENTITAS DAN PENGESAHAN LAPORAN PENELITIAN
PUSAT PENELITIAN DAN PENERBITAN LP2M UIN AR-RANIRY
TAHUN 2020**

1. a. Judul : Evolusi Perambatan Gelombang Melalui Analisis Semi Analitik Orde Tinggi Persamaan Kdv pada Pembangkit Gelombang Ekstrim
- b. Klaster : Penelitian Terapan Pengembangan Nasional
- c. No. Registrasi : 201110000035706
- d. Bidang Ilmu yang diteliti : Terapan

2. Peneliti/Ketua Pelaksana
 - a. Nama Lengkap : Budi Azhari, M.Pd
 - b. Jenis Kelamin : Laki-Laki
 - c. NIP^(Kosongkan bagi Non PNS) : 198003182008011005
 - d. NIDN : 2018038003
 - e. NIPN (ID Peneliti) : 201803800308552
 - f. Pangkat/Gol. : III/c
 - g. Jabatan Fungsional : Lektor
 - h. Fakultas/Prodi : FTK/Pendidikan Matematika

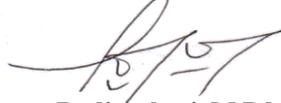
 - i. Anggota Peneliti 1
 - Nama Lengkap : Vina Apriliani, M.Si
 - Jenis Kelamin : Perempuan
 - Fakultas/Prodi : FTK/Pendidikan Matematika
 - j. Anggota Peneliti 2 ^(Jika Ada)
 - Nama Lengkap : -
 - Jenis Kelamin : -
 - Fakultas/Prodi : -

3. Lokasi Kegiatan :
4. Jangka Waktu Pelaksanaan : 7 (Tujuh) Bulan
5. Tahun Pelaksanaan : 2020
6. Jumlah Anggaran Biaya : Rp. 125.000.000
7. Sumber Dana : DIPA UIN Ar-Raniry B. Aceh Tahun 2020
8. *Output dan Outcome* : a. Laporan Penelitian; b. Publikasi Ilmiah; c. HKI

Mengetahui,
Kepala Pusat Penelitian dan Penerbitan
LP2M UIN Ar-Raniry Banda Aceh,

Dr. Anton Widyanto, M. Ag.
NIP. 197610092002121002

Banda Aceh, 19 Oktober 2020
Pelaksana



Budi Azhari, M.Pd.
NIDN.2018038003

Menyetujui:
Rektor UIN Ar-Raniry Banda Aceh,

Prof. Dr. H. Warul Walidin AK., MA.
NIP. 195811121985031007

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah Ini:

Nama : **Budi Azhari, M.Pd**
NIDN : 2018038003
Jenis Kelamin : Laki-Laki
Tempat/ Tgl. Lahir : Seumadam, 18-03-1980
Alamat : Jl. Nirbaya II No. 43, Bandar Baru, kec.
Kuta Alam, Banda Aceh
Fakultas/Prodi : FTK/ Pendidikan Matematika

Dengan ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa penelitian yang berjudul: **“Evolusi Perambatan Gelombang Melalui Analisis Semi Analitik Orde Tinggi Persamaan Kdv Pada Pembangkit Gelombang Ekstrim”** adalah benar-benar Karya asli saya yang dihasilkan melalui kegiatan yang memenuhi kaidah dan metode ilmiah secara sistematis sesuai otonomi keilmuan dan budaya akademik serta diperoleh dari pelaksanaan penelitian pada klaster Penelitian Terapan Pengembangan Nasional yang dibiayai sepenuhnya dari DIPA UIN Ar-Raniry Banda Aceh Tahun Anggaran 2020. Apabila terdapat kesalahan dan kekeliruan di dalamnya, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya.

Banda Aceh, 16 Oktober 2020
Saya yang membuat pernyataan,
Ketua Peneliti,



Budi Azhari, M.Pd
NIDN. 2018038003

EVOLUSI PERAMBATAN GELOMBANG MELALUI ANALISIS SEMI ANALITIK ORDE TINGGI PERSAMAAN KDV PADA PEMBANGKIT GELOMBANG EKSTRIM DAN TSUNAMI

Ketua Peneliti:

Budi Azhari, M.Pd

Anggota Peneliti:

Vina Apriliani, M.Si

Abstrak

Persamaan Korteweg de Vries (KdV) merupakan persamaan gelombang yang mendeskripsikan perambatan gelombang satu arah pada permukaan air dangkal dengan amplitudo gelombang kecil dan panjang gelombang yang besar. Dalam penelitian ini, ditampilkan solusi semi analitik dengan menggunakan parameter gangguan hingga orde ke-7. Selanjutnya, solusi tersebut dianalisa dengan dua buah parameter yaitu MTA (*Maximal Temporal Amplitude*) dan FAA (Faktor Aplikasi Amplitudo) dari gelombang input $\eta(0,t) = 2\alpha(\cos(\alpha + \beta) \cos(\alpha - \beta))$. *Plotting* solusi juga akan ditampilkan dalam bentuk grafik sinyal elevasi gelombang yang bergantung waktu (t) dengan nilai x yang tetap ($\eta(x_{fix}, t)$) dan MTA. Solusi semi analiti persamaan KdV dalam penelitian ini dilakukan mulai dari orde satu hingga orde ke tujuh dengan mengkombinasikan 7 persamaan yang diperoleh dari persamaan KdV termodifikasi, input gelombang bikromatik η_1 , 2 persamaan ekspansi bilangan gelombang dengan menggunakan teori gangguan dan Deret Taylor serta ekspansi η dengan teori gangguan yang menghasilkan solusi orde ketujuh, baik solusi *Bound wave* maupun solusi *free wave*. solusi orde ketujuh dalam konteks pengaruh orde yang lebih tinggi. Selain itu, pengaruh lain dalam penelitian ini didapati pada jarak pemuncakan yang lebih dekat daripada titik awal, hal ini dapat mengindikasikan bahwa orde yang lebih tinggi berpengaruh dari solusi dapat memberikan pengaruh pada pemuncakan maksimum pada gelombang.

Kata Kunci: *Persamaan KDV termodifikasi; Gelombang bikromatik; Parameter gangguan; soliton; MT,, FAA*

KATA PENGANTAR



Syukur Alhamdulillah kepada Allah SWT dan salawat beriring salam penulis persembahkan kepangkuan alam Nabi Muhammad SAW, karena dengan rahmat dan hidayah-Nya penulis telah dapat menyelesaikan laporan penelitian dengan judul **“Evolusi Perambatan Gelombang Melalui Analisis Semi Analitik Orde Tinggi Persamaan Kdv Pada Pembangkit Gelombang Ekstrim”**.

Dalam proses penelitian dan penulisan laporan ini tentu banyak pihak yang ikut memberikan motivasi, bimbingan dan arahan. Oleh karena itu penulis tidak lupa menyampaikan ucapan terima kasih kepada yang terhormat:

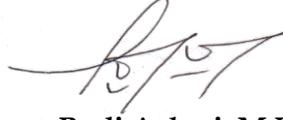
1. Bapak Rektor Universitas Islam Negeri Ar-Raniry Banda Aceh;
2. Ibu Ketua LP2M UIN Ar-Raniry Banda Aceh;
3. Bapak Kepala Pusat Penelitian dan Penerbitan UIN Ar-Raniry Banda Aceh;
4. Bapak Ketua Prodi Pendidikan Matematika beserta Staf;
5. Ketua Prodi Matematika MIPA Universitas Syiah Kuala
6. Ketua Prodi Matematika UIN Sumatra Utara, Medan
7. Ketua Prodi Matematika Universitas Sumatra Utara
8. Bapak/Ibu Validator;
9. Kepala Laboratorium Matematika Univeristas Syiah Kuala;

Akhirnya hanya Allah SWT yang dapat membalas amalan mereka, semoga menjadikannya sebagai amal yang baik.

Harapan penulis, semoga hasil penelitian ini bermanfaat dan menjadi salah satu amalan penulis yang diperhitungkan sebagai ilmu yang bermanfaat di dunia dan akhirat. *Amin ya Rabbal 'Alamin.*

Banda Aceh,

Ketua Peneliti,

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'Budi Azhari', written in a cursive style.

Budi Azhari, M.Pd

DAFTAR ISI

HALAMAN SAMPUL	
HALAMAN PENGESAHAN	
HALAMAN PERNYATAAN	
ABSTRAK.....	iv
KATA PENGANTAR.....	v
DAFTAR ISI.....	vii
DAFTAR TABEL.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	x
BAB I : PENDAHULUAN	
A. Latar Belakang Masalah.....	1
B. Rumusan Masalah.....	5
C. Tujuan Penelitian.....	6
D. Manfaat Penelitian.....	6
BAB II : LANDASAN TEORI	
A. Pemodelan Matematika.....	8
B. Diferensial.....	11
C. Persamaan Diferensial.....	12
D. Orde dan Pangkat Persamaan Diferensial.....	17
E. Solusi Persamaan Diferensial.....	19
F. Metode Numerik.....	20
G. Metode Asimtotik.....	22
H. Persamaan Laplace.....	30
I. Persamaan Lengkap.....	35
J. Parameter Gangguan.....	36
K. Persamaan KdV (Korteweg-de Vries).....	39
BAB III : METODE PENELITIAN	
A. Alat dan Bahan Penelitian.....	46
B. Tempat Penelitian.....	46
C. Variabel Operasional Penelitian.....	46
D. Prosedur Penelitian.....	48
BAB IV : HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN	
A. Teknik Pemaduan Persamaan.....	49
B. Resonansi dan Side Band.....	66
C. Tabel Koefesien dan Bilangan Gelombang.....	68

BAB V : PENUTUP	
A. Kesimpulan.....	87
B. Saran-saran.....	88
DAFTAR PUSTAKA	89
BIODATA PENELITI.....	91

DAFTAR TABEL

Tabel 4.1 Koefesien dari solusi orde.....	69
Tabel 4.2. Bilangan Gelombang untuk <i>Free Wave</i> pada tiap ordenya	80

DAFTAR GAMBAR

Gambar 3.1. Diagram alur Penelitian.....	48
Gambar 4.1. Grafik MTA dengan Panjang kolom 100 m	65
Gambar 4.2. Grafik MTA dengan Panjang kolom 100 m	66

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Indonesia merupakan negara kepulauan yang berada diantara samudera hindia dan samudera pasifik, serta berada diantara benua asia dan australia yang sebagian besar wilayahnya adalah lautan. Letak geografis Indonesia posisi silang yang diapit oleh dua benua dan dua samudera besar, membuat iklim di Indonesia sangat dinamis sehingga berpengaruh terhadap fenomena laut, seperti sering terjadinya gelombang ekstrim di lautan Indonesia.

Berkaitan dengan fenomena muncul dan dampak yang diakibatkan dari gelombang ini. Gelombang ekstrim juga disebut dengan gelombang misterius (*freak wave*) dan juga gelombang raksasa (*giant wave*). Ada beberapa jenis penyebab terbentuknya gelombang ekstrim seperti angin, pasang surut, arus dan juga aktifitas lempeng bumi.

Gelombang raksasa (*giant wave*) yang diakibatkan oleh aktifitas lempeng tektonik bumi mengakibatkan terjadinya gempa dan tsunami. Indonesia yang berada di sepanjang "Cincin Api Pasifik", mempunyai potensi besar gempa dan tsunami akibat dari lempeng tektonik yang bertabrakan dan mengakibatkan terjadi letusan gunung berapi dan juga gempa bumi dalam laut dan memicu terbentuknya gelombang Tsunami. Seperti yang terjadi pada tanggal 26 Desember 2004 di Aceh.

Kajian tentang karakteristik dan variasi gelombang di perairan Indonesia, terutama berkaitan dengan gelombang ekstrim

sangat diperlukan sebagai suatu acuan bagi kebutuhan masyarakat dan pemerintah dalam melaksanakan kegiatan pelayaran, perdagangan, dan perikanan, serta informasi sebagai upaya pencegahan bencana dan juga kecelakaan laut pada kapal. Sehingga penelitian terhadap gelombang ekstrim sangat penting untuk terus dilakukan secara kontinu oleh para peneliti.

Gelombang ekstrim di Indonesia sering terjadi secara acak, baik berkaitan dengan tempat maupun waktu. Gelombang ekstrim ini memiliki daya perusak yang sangat kuat, terutama bagi kapal dan bangunan lepas pantai disekitar terjadinya gelombang tersebut (lihat Earle, 1975; Mori, 2002; Divinsky dan Levin, 2004; Truslen dan Dysthe, 1996; Smith, 1976).

Gelombang dapat dikategorikan ekstrim bila tinggi gelombang telah melebihi dari ketinggian 2,2 kali dari ketinggian gelombang signifikan (Dean, 1990; Kjeldsen, 1984). Perilaku gelombang permukaan dapat digambarkan dalam persamaan diferensial parsial yaitu persamaan Korteweg de Vries (KdV), Boussinesq, Kadomtsev-Petviashvili (KP), Benjamin Bona Mahony (BBM), dan persamaan-persamaan lain yang semuanya berbentuk nonlinier. Persamaan-persamaan ini merupakan penyederhanaan dan kajian lanjut dari persamaan lengkap.

Persamaan gelombang yang disebutkan di atas merupakan persamaan diferensial parsial tak linier, sehingga solusinya sulit untuk ditemukan. Untuk mengatasi hal ini linierisasi menjadi suatu andalan yang akan dipakai untuk menemukan solusi yang hampir dengan fenomena alam nyata. Penyederhanaan dilakukan dengan cara *uni directionalisation* pada persamaan KdV (Cahyono, 2002).

Persamaan tersebut telah direduksi ke dalam persamaan diferensial parsial tak linier dengan orde turunan yang lebih rendah dari persamaan asalnya. Hal ini akan mempermudah penentuan solusi jika linearisasi diterapkan pada persamaan KdV.

Persamaan KdV merupakan persamaan gelombang yang mendeskripsikan perambatan gelombang satu arah pada permukaan air dangkal dengan amplitudo gelombang kecil dan panjang gelombang yang besar (Ablowitz, 2011). Metode pemecahan masalah untuk persamaan nonlinier sangat jarang ditemukan. Sehingga para ilmuwan berusaha mencari pendekatan solusi tersebut yang berakhir pada pendekatan numerik, analitik atau kombinasi keduanya. Salah satu metode pemecahan yang digunakan adalah metode asimtotik. Menurut Mashuri dan Marwan (2011) metode asimtotik dapat diterapkan untuk menentukan solusi perkiraan dari persamaan KdV dimana amplitudo dapat diekspansi menggunakan deret pangkat hingga orde tiga.

Metode ekspansi asimtotik juga diterapkan oleh Marwan (2016) untuk menentukan solusi dari persamaan Boussinesq pada gelombang ekstrim dan metode ini juga telah diterapkan oleh Mashuri et. al.(2017) untuk menentukan solusi dari persamaan Kadomtsev Petviashvili yang menggambarkan dua dimensi dari persamaan KdV.

Pada persamaan KdV, orde yang semakin tinggi mampu meningkatkan nilai amplitudo gelombang, namun nilai tersebut belum mampu menyamai amplitudo yang dihasilkan oleh persamaan lengkap Laplace. Padahal persamaan KdV merupakan

penurunan yang lebih sederhana untuk menghampiri persamaan lengkap Laplace.

Banyak teknik matematika yang sering diterapkan untuk mempermudah penyelesaian dari persamaan diferensial, seperti linierisasi, transformasi, ekspansi ke dalam Deret Taylor dan Mac Laurin, metode numerik, ekspansi asimtotik dan sebagainya. Semua teknik tersebut digunakan tentu saja untuk mempermudah penyelesaian masalah dengan tingkat galat yang bisa dipertanggung jawabkan. Pemilihan teknik sangat didasari pada jenis masalah dan tingkat kemudahan yang bisa direduksi.

Untuk permasalahan gelombang permukaan teknik matematika yang sering digunakan adalah linierisasi yang dipadukan dengan ekspansi asimtotik (Cahyono, 2002; Marwan, 2010). Dengan teknik ini kita bisa membangun solusi dari persamaan-persamaan gelombang permukaan yang tak linier hingga tahap orde-orde yang diinginkan.

Marwan (2010) telah melakukan penelitian terhadap persamaan KdV hingga suku *side band* orde tiga untuk melihat ketinggian maksimum amplitudo yang dapat dihasilkan oleh solusi hingga orde tiga, ternyata pada suku orde ketiga diperoleh suku *side band* yang magnitud amplitudonya dapat melebihi magnitud amplitudo suku orde kedua dan ketiga yang lain. Suku *side band* orde ketiga memiliki frekuensi yang cukup dekat dengan frekuensi orde pertama, sehingga keberadaan suku *side band* orde ke tiga dapat mendominasi pengaruh suku orde kedua dan ketiga yang lain. Selanjutnya Afriadi (2017) melanjutkan dengan ekspansi asimtotiknya sampai pada orde ke-5 untuk tujuan yang sama.

Setelah diketahui posisi puncak gelombang dari pendekatan solusi KdV orde tiga, tetapi posisi tersebut lebih rendah dibandingkan hasil eksperimen menggunakan software HUBRIS. Ini diduga karena ekspansi yang masih belum memadai. Oleh karena Afriadi (2017) melakukan penelitian terhadap persamaan KdV untuk mencari solusi KdV hingga orde lima menggunakan ekspansi asimtotik serta membandingkan ketinggian amplitudo dari solusi orde tiga dengan solusi orde lima. Pada penelitian ini konstruksi solusi orde tujuh menghasilkan suku resonansi dan suku side band seperti pada orde tiga dan lima. Seperti halnya pada orde ketiga dan lima, suku *side band* orde ketujuh memiliki frekuensi yang cukup dekat dengan frekuensi suku orde pertama dan magnitud amplitudonya dapat melebihi magnitud amplitudo suku orde keenam dan ketujuh yang lain. Untuk ketinggian amplitudo dengan pendekatan solusi orde ketujuh terdapat peningkatan nilai amplitudo maksimum dibandingkan solusi orde tujuh dengan kata lain amplitudo dari solusi orde tujuh lebih tinggi dibandingkan orde lima.

B. Rumusan Masalah

Sebagaimana telah dimaklumi bersama bahwa persamaan KdV merupakan persamaan diferensial parsial yang tak linier, tentu saja solusinya tidak mudah untuk diperoleh. Penelitian ini akan membangun solusi persamaan KdV dengan menggunakan ekspansi asimtotik dari η dan k hingga orde ke-7. Penelitian ini merupakan pengembangan dari penelitian Marwan (2010) yang melakukan ekspansi asimtotik pada orde ke-3 dan Afriadi (2017) melanjutkan

dengan ekspansi asimtotiknya sampai pada orde ke-5. Suku resonansi yang muncul pada orde ganjil akan dikaji secara detil dalam penelitian ini. Sehingga pertanyaan dalam penelitian ini, bagaimanakah solusi persamaan KdV dengan menggunakan ekspansi asimtotik dari η dan k hingga orde ke-7?

C. Tujuan Penelitian

Sebagaimana diketahui bersama bahwa persamaan KdV merupakan PDP tak linier. Terkait dengan permasalahan tersebut, tujuan penelitian ini adalah untuk membangun solusi dari persamaan KdV dengan menggunakan ekspansi asimtotik berlandaskan teori parameter gangguan hingga orde ke-7. Interaksi dari berbagai solusi antar orde akan menghasilkan faktor resonansi pada orde-orde ganjil. Keberadaan efek resonansi, formula posisi ekstrim serta faktor amplifikasi akan diselidiki secara detil untuk mendapatkan penggambaran solusi secara totalitas. Penentuan di posisi mana suatu sinyal *input* yang diberikan di pembangkit gelombang akan mengalami peristiwa pemuncakan tertinggi dan berapa besar ketinggian gelombang terbangkit di posisi tersebut akan mudah ditemukan ketika solusinya telah diperoleh.

D. Manfaat Penelitian

Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi dalam upaya untuk memperoleh 2 parameter pembangkitan gelombang. Hasil ini akan dapat digunakan untuk mencari jawab bagaimana gelombang ekstrim dapat dibangkitkan di kolam pengujian. Dengan demikian, proses pembangkitan gelombang

ekstrim di laboratorium guna pengujian model benda terapung berupa kapal ataupun stasiun pengeboran minyak lepas pantai. Berdasarkan formula ini akan dapat diprediksi posisi penempatan suatu benda terapung yang akan diuji kelayakannya di laboratorium. Dengan demikian, upaya coba-coba salah yang selama ini sering dilakukan di laboratorium dapat dihindari. Selain itu, diharapkan pula bahwa melalui hasil penelitian, pembangkitan gelombang di laboratorium dapat dilakukan dengan lebih efektif dan efisien.

BAB II LANDASAN TEORI

A. Pemodelan Matematika

Model adalah representasi penyederhanaan dari sebuah realita yang kompleks (biasanya bertujuan untuk memahami realita tersebut) dan mempunyai *feature* yang sama dengan tiruannya dalam melakukan *task* atau menyelesaikan permasalahan (Widowati & Sutimin, 2007). Model adalah karakteristik umum yang mewakili sekelompok bentuk yang ada, atau representasi suatu masalah dalam bentuk yang lebih sederhana dan mudah dikerjakan.

Dalam matematika, teori model adalah ilmu yang menyajikan konsep-konsep matematis melalui konsep himpunan, atau ilmu tentang model-model yang mendukung suatu sistem matematis. Teori model diawali dengan asumsi keberadaan obyek-obyek matematika (misalnya keberadaan semua bilangan) dan kemudian mencari dan menganalisis keberadaan operasi-operasi, relasi-relasi, atau aksioma-aksioma yang melekat pada masing-masing obyek atau pada obyek-obyek tersebut. Indenpensi dua hukum matematis yang lebih dikenal dengan nama *axiom of choice*, dan *contnuum hypothesis* dari aksioma-aksioma teori himpunan.

Model merupakan representasi dari suatu sistem. Sistem didefinisikan sebagai himpunan atau kombinasi dari bagian-bagian yang membentuk sebuah kesatuan yang kompleks. Suatu himpunan atau gugus bagian bisa disebut sebagai suatu sistem yaitu jika memenuhi syarat adanya kesatuan (*unity*), hubungan fungsional, dan tujuan. Pemodelan menangkap bagian esensial dari sistem.

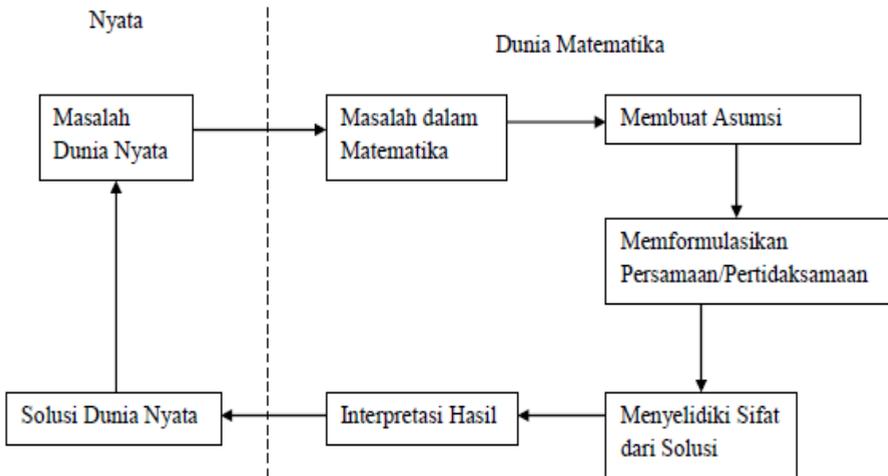
Pemodelan merupakan bentuk abstraksi (Rumbaugh dalam Putro dkk, 2013). Model diperlukan jika akan membangun sesuatu. Abstraksi adalah proses memfokuskan pada fitur tertentu yang sangat esensial untuk menyelesaikan tugas dan menghindarkan beberapa fitur yang tidak diperlukan.

Model matematika merupakan representasi matematika yang dihasilkan dari pemodelan matematika. Pemodelan matematika merupakan suatu proses merepresentasikan dan menjelaskan permasalahan pada dunia nyata ke dalam pernyataan matematis (Widowati & Sutimin, 2007). Menurut Side (2014), model matematik adalah hubungan antara komponen-komponen dalam suatu masalah yang dirumuskan dalam suatu persamaan matematik yang memuat komponen-komponen itu sebagai variabelnya. Proses untuk memperoleh model dari suatu masalah disebut pemodelan matematika. Suatu model matematika dikatakan baik jika model matematika yang terbentuk dapat merepresentasikan atau mewakili suatu permasalahan dalam kehidupan nyata.

Pemodelan matematika merupakan proses dalam memperoleh pemahaman matematika melalui konteks dunia nyata. Menurut Lovitt (1991), pemodelan matematika ditandai oleh dua ciri utama, yaitu (1) pemodelan bermula dan berakhir dengan dunia nyata, (2) pemodelan membentuk suatu siklus. Pemodelan matematika adalah penyusunan suatu deskripsi dari beberapa perilaku dunia nyata (fenomena-fenomena alam) ke dalam bagian-bagian matematika yang disebut dunia matematika (*mathematical world*). Pemodelan matematika juga merupakan representasi dari objek, proses, atau hal

lain yang diharapkan dapat diketahui polanya sehingga dapat dianalisis (Senk dan Thompson dalam Turmudi, 2010).

Proses pemodelan Matematika dinyatakan dalam diagram alur sebagai berikut:



Gambar 2.1. Diagram Alur Proses Pemodelan Matematika

Berdasarkan di atas maka dapat diperoleh langkah-langkah pemodelan matematika sebagai berikut:

1. Menyatakan permasalahan nyata ke dalam pengertian matematika. Pada langkah ini permasalahan yang terjadi di dunia nyata dimodelkan dalam bahasa matematis. Langkah ini meliputi identifikasi variabel-variabel dalam masalah dan membentuk beberapa hubungan antar variabel yang dihasilkan dari permasalahan tersebut.
2. Membuat Asumsi. Asumsi dalam pemodelan matematika mencerminkan bagaimana proses berpikir sehingga model dapat berjalan.

3. Formulasi persamaan/pertidaksamaan, dengan pemahaman hubungan antar variabel dan asumsi, langkah selanjutnya yaitu memformulasikan persamaan atau sistem persamaan. Formulasi model merupakan langkah yang paling penting, sehingga terkadang diperlukan adanya pengujian kembali asumsi-asumsi agar dalam proses pembentukan formulasi dapat sesuai dan realistis. Jika pada proses pengujian kembali ditemukan ketidaksesuaian model, maka perlu dilakukan pengkajian ulang asumsi dan membentuk asumsi yang baru.
4. Menyelidiki sifat dari solusi. Setelah membentuk formulasi model, langkah selanjutnya adalah menyelidiki sifat dari solusi yaitu menyelidiki apakah solusi sistem stabil atau tidak stabil.
5. Interpretasi. Hasil interpretasi merupakan suatu langkah yang menghubungkan formula matematika dengan kembali ke permasalahan dunia nyata. Interpretasi ini dapat diwujudkan dalam bentuk grafik yang digambarkan berdasarkan solusi yang diperoleh dan selanjutnya diinterpretasikan sebagai solusi dalam dunia nyata.

B. Diferensial

Turunan fungsi f adalah fungsi f' (dibaca “ f aksen”). Dimisalkan fungsi f terdefinisi dan bernilai tunggal dalam suatu daerah D dimana c suatu titik di dalam D , maka turunan fungsi $f(c)$ (Purcel, 1984), yaitu:

$$f'(c) = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}.$$

Jika terdapat limit $f(c)$, maka fungsi f mempunyai turunan di c . Turunan $y = f(x)$ terhadap x dapat dinyatakan oleh salah satu simbol berikut:

$$\frac{d}{dx}y, \frac{dy}{dx}, D_x y, y', f'(x), \frac{d}{dx}f(x).$$

C. Persamaan Diferensial

Dalam ilmu pengetahuan dan teknik, model matematika dikembangkan untuk membantu memahami fenomena fisik. Model ini sering mengacu pada suatu persamaan yang mengandung satu atau lebih turunan atau fungsi yang tidak diketahui. Persamaan ini disebut sebagai persamaan diferensial (Nagle, 1996).

Leibniz memperkenalkan persamaan diferensial pada tahun 1676. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang menghubungkan turunan dari fungsi yang tidak diketahui, fungsi itu sendiri, variabel sehingga fungsi terdefinisi, dan konstanta (Farlow, 1994). Persamaan diferensial ini menyangkut satu atau lebih fungsi (peubah tak bebas) beserta turunannya terhadap satu atau lebih peubah bebas (Pamuntjak, 1990). Peubah/variabel bebas adalah variabel yang nilainya tidak bergantung pada nilai variabel yang lain, sedangkan peubah tak bebas/variabel terikat adalah variabel yang nilainya bergantung pada nilai variabel yang lain.

Berdasarkan bentuk diferensial yang dikandungnya, persamaan diferensial dibagi menjadi dua macam, yaitu:

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung

pada satu variabel bebas. Variabel y biasa digunakan sebagai variabel takbebas, sedangkan variabel x atau t biasa digunakan sebagai variabel bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa adalah sebagai berikut:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (2.1)$$

Berdasarkan sifat kelinearan dari peubah takbebasnya, persamaan (2.1) dapat dibedakan menjadi:

a. Persamaan Diferensial Biasa Linear

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear adalah sebagai berikut:

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x) = f(x) \quad (2.2)$$

dengan $a_n \neq 0$ dan $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(x)$ disebut *input* atau unsur nonhomogen. Jika $f(x)$ disebut *input*, maka solusi dari persamaan diferensial $y(x)$ biasanya disebut *output*. Jika ruas sebelah kanan bernilai nol untuk semua nilai x dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, sebaliknya dikatakan nonhomogen (Hidayat dalam Putri, 2013).

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = 2y + 3x$$

merupakan persamaan diferensial biasa linear nonhomogen.

b. Persamaan Diferensial Biasa Nonlinear

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk persamaan (2.2), maka persamaan diferensial tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinear (Farlow, 1994).

Contoh:

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2$$

merupakan persamaan diferensial biasa nonlinear (Persamaan Bernoulli).

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dan bergantung pada lebih dari satu variabel bebas (Farlow, 1994).

Misalkan f suatu fungsi dua variabel x dan y . Turunan parsial f terhadap x adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh $D_x f$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x, y) dalam domain f diberikan oleh

$$D_x f(x, y) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

apabila limit ini ada. Dengan cara yang sama, turunan parsial f terhadap y adalah suatu fungsi yang dinyatakan oleh $D_y f$, yang nilai fungsinya di setiap titik (x, y) dalam domain f diberikan oleh

$$D_y f(x, y) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

apabila limit ini ada.

Proses pencarian turunan parsial tersebut disebut pendiferensialan parsial. $D_x f$ menyatakan fungsi yang merupakan turunan parsial f terhadap variabel pertama. $D_x f(x, y)$ menyatakan nilai fungsi $D_x f$ di titik (x, y) . Notasi lain secara Leibnitz untuk $D_x f$ adalah $\frac{\partial f}{\partial x}$. Notasi lain untuk $D_x f(x, y)$ adalah $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$. Dengan cara

yang sama, notasi-notasi lain untuk $D_y f$ adalah $\frac{\partial f}{\partial y}$. Notasi lain untuk $D_y f(x, y)$ adalah $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$.

Bila $z = f(x, y)$, dapat ditulis $\frac{\partial z}{\partial x}$ untuk $D_x f(x, y)$. Turunan parsial tidak dapat dipandang sebagai hasil bagi dari ∂z dan ∂x karena masing-masing simbol ini tidak mempunyai arti secara terpisah. Notasi $\frac{\partial y}{\partial x}$ dapat dianggap sebagai hasil bagi dua diferensial apabila y suatu fungsi satu variabel x , tetapi tidak ada tafsiran yang serupa seperti itu untuk $\frac{\partial z}{\partial x}$ (Leithold, 1991). Dalam persamaan diferensial parsial perlu diketahui beberapa notasi turunan parsial yang terlibat, yaitu:

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad u_{yy} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Sebagai contoh diberikan bentuk kasus dari persamaan diferensial parsial berikut:

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \text{ dengan } z = f(x, y).$$

Dalam hal ini, variabel-variabel x dan y adalah variabel bebas, sedangkan z adalah variabel terikat. Untuk mencari nilai $\frac{\partial z}{\partial x}$ yaitu didiferensialkan/diturunkan z terhadap x dengan menjaga y sebagai konstanta, sedangkan untuk memperoleh $\frac{\partial z}{\partial y}$ yaitu didiferensialkan/diturunkan z terhadap y dengan menjaga x sebagai konstanta.

Persamaan diferensial parsial banyak dijumpai dalam banyak kasus, misalnya persamaan gelombang, perpindahan panas dan massa, difusi, fisika nuklir, aerodinamika, elektromagnetik, dan lain-lain.

Beberapa hal yang berkaitan dengan persamaan diferensial parsial adalah sebagai berikut:

a. Jumlah Variabel

Jumlah variabel dalam persamaan diferensial parsial adalah jumlah variabel bebasnya.

Contoh:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (2 \text{ Variabel})$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0 \quad (3 \text{ Variabel})$$

b. Persamaan Diferensial Parsial Linear dan Nonlinear

Persamaan diferensial parsial dapat diklasifikasikan menjadi linear atau nonlinear. Bentuk umum PDP linear tingkat dua dalam dua variabel bebas adalah:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \quad (2.3)$$

dengan A, B, C, D, E, F, G merupakan fungsi dalam x dan y . Suatu PDP dikatakan nonlinear jika variabel tak bebas u dan turunan parsialnya muncul dalam persamaan dengan cara tidak linear (dipangkatkan atau dikalikan). Persamaan diferensial parsial orde dua dalam dua variabel bebas yang tidak berbentuk seperti persamaan (2.3) disebut persamaan nonlinear.

Contoh:

$$u_t = a^2 u_{xx} \quad (\text{PDP linear})$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u = 4 \quad (\text{PDP linear})$$

$$u_{xx} + uu_y + u = 1 \quad (\text{PDP nonlinear})$$

$$u_{xx} + u_{yy} + u^2 = 0 \quad (\text{PDP nonlinear})$$

$$u_{xx} + u_{yy} + (u_x)^2 = 0 \quad (\text{PDP nonlinear})$$

c. Persamaan Diferensial Parsial Linear Homogen

Persamaan umum diferensial parsial linear (2.3) disebut homogen jika $G = 0$ untuk semua x dan y , sedangkan jika $G \neq 0$ disebut non homogen (Roziana & Farida, 2008).

d. Tipe-Tipe Dasar dari Persamaan Linear

Suatu klasifikasi penting dalam PDP adalah terdiri dari tipe parabolik, hiperbolik, dan eliptik. Persamaan diferensial parsial linear orde dua atau persamaan (2.3) dapat dibedakan menjadi 3 tipe (Triatmojo, 2002), yaitu:

a. Persamaan Ellips jika $B^2 - 4AC < 0$

Contoh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Persamaan Laplace})$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y) \quad (\text{Persamaan Poisson})$$

b. Persamaan Parabola jika $B^2 - 4AC = 0$

Contoh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} \quad (\text{Persamaan Panas Satu Dimensi})$$

c. Persamaan Hiperbola jika $B^2 - 4AC > 0$

Contoh:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (\text{Persamaan Gelombang})$$

D. Orde dan Pangkat Persamaan Diferensial

Orde (tingkat) suatu persamaan diferensial adalah orde (tingkat) dari turunan yang terdapat pada persamaan itu yang tingkatnya paling tinggi (Pamuntjak dkk, 1990).

Sebagai contoh adalah:

Persamaan Diferensial Biasa Orde Satu

$$\frac{dy}{dx} = x + 5 \quad \text{dan} \quad xy' + y = 3.$$

Persamaan Diferensial Parsial Orde Satu

$$x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = z \quad \text{dan} \quad u_t = u_x.$$

Persamaan Diferensial Biasa Orde Dua

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0 \quad \text{dan} \quad (y'')^2 + (y')^5 + 3y = x^2.$$

Persamaan Diferensial Parsial Orde Dua

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 3 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad \text{dan} \quad u_t = \alpha^2 u_{xx}.$$

Bila suatu persamaan diferensial biasa berbentuk polinom dalam peubah bebas beserta turunan-turunannya, persamaan diferensial itu dapat dicirikan menurut pangkat (derajat) nya.

Pangkat (derajat) suatu persamaan diferensial biasa yang berbentuk polinom dalam fungsi (peubah tak bebas) beserta turunan-turunannya adalah pangkat (derajat) polinom itu, yakni pangkat tertinggi dari perkalian peubah tak bebas beserta turunan-turunannya yang terdapat dalam persamaan diferensial itu (Pamuntjak, 1990). Sebagai contoh adalah:

Persamaan Diferensial Orde Satu Derajat Satu

$$dy + (xy - \cos x)dx = 0.$$

Persamaan Diferensial Orde Dua Derajat Satu

$$\frac{d^2v}{dx^2} \cdot \frac{dv}{dx} + x \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + v = 0.$$

Persamaan Diferensial Orde Empat Derajat Satu

$$\frac{d^4y}{dx^4} + x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + \cos x \frac{dy}{dx} - y = x^2 + 1.$$

Persamaan Diferensial Orde Dua Derajat Tiga

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y^2 + x^2 = 0.$$

Persamaan Diferensial Orde Satu Derajat Empat

$$\left[\frac{dy}{dx}\right]^4 + 4x^2 = 0$$

E. Solusi Persamaan Diferensial

Solusi/penyelesaian dari persamaan diferensial biasa orde- n adalah fungsi $y = y(x)$ yang jika disubstitusikan ke persamaan tersebut akan memenuhi sepanjang interval $a < x < b$ (Farlow, 1994).

Contoh Solusi Persamaan Diferensial Biasa:

1. Fungsi $y(x) = \sin x - \cos x + 1$ adalah solusi dari persamaan diferensial biasa linear $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$.
2. Fungsi $y_1(t) = \cos t$ dan $y_2(t) = \sin t$ adalah solusi dari persamaan $y'' + y = 0$ untuk semua t , karena apabila $y_1(t)$ dan/atau $y_2(t)$ disubstitusikan ke dalam persamaan $y'' + y = 0$, maka akan diperoleh kesamaan.

Suatu penyelesaian (solusi) persamaan diferensial (dalam peubah x dan y) merupakan suatu hubungan antara x dan y , yang jika disubstitusikan ke dalam persamaan tersebut akan memberikan kesamaan (identitas). Solusi dari persamaan diferensial dibedakan menjadi dua, yaitu solusi umum dan solusi khusus. Solusi umum (*general solution*) adalah solusi (baik dinyatakan secara eksplisit maupun implisit) yang memuat semua solusi yang mungkin pada suatu interval (Ross, 1984). Solusi umum persamaan diferensial memuat konstanta-konstanta sehingga setiap solusi dapat diperoleh

dari solusi umum dengan mengambil konstanta-konstanta yang sesuai (Supriyono & Hendikawati, 2008).

Jika $y' = f(x)$ diintegrasikan, diperoleh $y = \int f(x) dx + C$ yang mengandung satu tetapan integrasi, yaitu C . Jika $y'' = g(x)$ diintegrasikan dua kali untuk mendapatkan y , maka y mengandung dua tetapan integrasi. Penyelesaian seperti ini dinamakan penyelesaian umum dari persamaan diferensial linear tersebut. Hal yang sama untuk persamaan diferensial taklinear. Solusi yang diperoleh dari solusi umum dengan mengambil konstanta/tetapan yang sesuai dinamakan solusi khusus atau solusi komplemen. Solusi khusus (partikular) adalah solusi yang tidak memuat konstanta karena adanya syarat awal pada suatu persamaan diferensial (Ayres, 1952). Akan tetapi, kebanyakan persamaan diferensial taklinear tidak dapat diselesaikan secara eksplisit. Cara yang tepat dalam mempelajari persamaan diferensial taklinear beserta solusinya ialah membuat persamaan tersebut menjadi linear, yaitu dengan menghampiri persamaan tersebut oleh persamaan diferensial linear (aproksimasi).

Misal diberikan contoh $y' = 3$ memiliki solusi umum yaitu $y = 3x + C$. Jika diberikan syarat awal $y(0) = 1$, maka diperoleh solusi khusus yaitu $y = 3x + 1$.

F. Metode Numerik

Metode numerik adalah teknik yang digunakan untuk memformulasikan persoalan matematik sehingga dapat dipecahkan dengan operasi perhitungan/aritmatika biasa (tambah, kurang, kali, dan bagi). Metode artinya cara, sedangkan numerik artinya angka.

Jadi metode numerik secara harfiah berarti cara berhitung dengan menggunakan angka-angka.

Metode numerik disebut juga sebagai alternatif dari metode analitik, yang merupakan metode penyelesaian persoalan matematika dengan rumus-rumus aljabar yang sudah baku atau lazim. Disebut demikian, karena adakalanya persoalan matematika sulit diselesaikan atau bahkan tidak dapat diselesaikan secara analitik sehingga dapat dikatakan bahwa persoalan matematika tersebut tidak mempunyai solusi analitik. Sebagai alternatifnya, persoalan matematika tersebut diselesaikan dengan metode numerik.

Metode numerik adalah teknik untuk menyelesaikan permasalahan-permasalahan yang diformulasikan secara matematis dengan operasi aritmatika. Hasil dari penyelesaian numerik merupakan nilai perkiraan atau pendekatan dari penyelesaian analitik atau eksak. Karena merupakan nilai pendekatan, maka terdapat kesalahan atau galat terhadap nilai eksak. Nilai kesalahan tersebut harus cukup kecil terhadap tingkat kesalahan yang ditetapkan (Triatmodjo, 2002).

Perbedaan utama antara metode numerik dengan metode analitik terletak pada dua hal, yaitu:

1. Solusi dengan metode numerik selalu berbentuk angka, sedangkan dengan metode analitik biasanya menghasilkan solusi dalam bentuk fungsi matematik yang selanjutnya fungsi matematik tersebut dapat dievaluasi untuk menghasilkan nilai dalam bentuk angka.
2. Metode numerik hanya menghasilkan solusi yang menghampiri atau mendekati solusi sejati sehingga solusi numerik dinamakan

juga solusi hampiran (*approximation*) atau solusi pendekatan. Akan tetapi, solusi hampiran tersebut dapat dibuat seteliti yang diinginkan. Solusi hampiran tentu tidak tepat sama dengan solusi sejati, sehingga ada selisih antara keduanya, dan selisih tersebut dinamakan sebagai galat (*error*). Sedangkan dengan metode analitik sudah pasti dihasilkan solusi yang sebenarnya atau solusi sejati yang sesuai dengan kenyataannya (Munir, 2008).

G. Metode Asimtotik

Ada banyak permasalahan dalam matematika terapan dimana persamaan pengaturannya adalah sekumpulan persamaan tidak stabil yang melibatkan banyak variabel. Sebagian besar persamaan adalah persamaan taklinear dan sulit diselesaikan secara analitik. Solusi numerik adalah salah satu pilihan. Namun demikian, jika ada parameter besar atau kecil yang muncul, penggunaan metode asimtotik dapat membantu dalam proses memahami karakteristik solusi, memungkinkan untuk mendapatkan solusi dalam bentuk analitik serta mereduksi persamaan menjadi jauh lebih sederhana dan bisa diselesaikan dengan jauh lebih mudah.

Kebanyakan masalah matematis yang dihadapi para matematikawan, ilmuwan dan insinyur, memiliki karakteristik yang melibatkan solusi eksak. Beberapa karakteristik tersebut adalah:

- a. Bagian taklinear pada persamaan,
- b. Koefisien variabel,
- c. Kondisi batas taklinear pada batas yang diketahui,
- d. Kondisi batas linear atau taklinear pada batas yang tidak diketahui.

Solusi eksak sangat jarang ditemukan, disebabkan oleh faktor ketaklinearan, inhomogenitas, dan syarat batas secara umum. Oleh karena itu, matematikawan yang bekerja di bidang terapan dipaksa untuk mencari solusi aproksimasi dari masalah yang mereka hadapi. Aproksimasi tersebut bisa berbentuk numeric murni, analitik murni, atau kombinasi teknik numerik dan analiti (Nayfeh, 1981). Salah satu aproksimasi tersebut dikenal dengan *Perturbation Theory*.

Perturbation Theory adalah nama untuk sejumlah teknik yang dikembangkan untuk menurunkan solusi aproksimasi, berlaku dalam batasan kasus tertentu yang berguna untuk memahami proses penting dalam bentuk sederhana. Teknik ini sering memiliki kemampuan prediksi yang benar-benar akurat bahkan ketika diterapkan di luar daerah dimana metode ini digunakan. Solusi aproksimasi yang didapatkan dengan *Perturbation Theory* biasanya berisi satu, dua, atau tiga bagian dari ekspansi deret tertentu dalam persekitaran titik dimana solusi memiliki singularitas penting (Holmes, 1995). Salah satu metode yang dikembangkan dalam *Perturbation Theory* adalah metode asimtotik.

Adanya sifat nonlinear pada persamaan diferensial akan diperoleh bentuk solusi yang sulit dan tidak ada teknik umum yang tersedia, sehingga digunakanlah ekspansi asimtotik untuk mendapatkan pendekatan solusi persamaan diferensial nonlinear. Atau dapat dikatakan, persamaan yang nonlinear bisa diselesaikan dengan menggunakan metode ekspansi asimtotik yaitu dengan pendekatan linear untuk menentukan solusinya. Ekspansi asimtotik tersebut merupakan ekspansi dari deret pangkat. Ekspansi asimtotik dalam analisis ini digunakan untuk menggambarkan perilaku dari

suatu fungsi dalam situasi yang terbatas, ketika sebuah fungsi $f(\epsilon)$ tergantung pada parameter ϵ yang kecil, dan solusi dari persamaan yang mengatur fungsi ini diketahui pada $\epsilon = 0$.

Metode asimtotik berguna dalam beberapa cara. Pertama, bisa secara langsung menemukan solusi aproksimasi untuk suatu masalah. Kedua, metode ini bisa digunakan untuk menemukan pendekatan solusi eksak yang sulit dimengerti (misalnya, solusi yang ditulis dalam bentuk fungsi Bessel dengan argumen yang banyak dan rumit, atau dalam bentuk fungsi elliptic). Dengan demikian, jika digunakan pendekatan menggunakan metode asimtotik, permasalahan akan menjadi lebih sederhana dan bisa diselesaikan dengan tepat.

Suatu perangkat matematis yang akan digunakan dalam metode ini adalah deret Taylor, seperti yang dijelaskan berikut ini:

1. Ekspansi Deret Taylor

Deret Taylor adalah bentuk khusus dari suatu fungsi yang dapat digunakan sebagai pendekatan dari integral suatu fungsi yang tidak memiliki anti turunan elementer dan dapat digunakan untuk menyelesaikan persamaan diferensial (Kreyszig, 2011).

Andaikan f memenuhi

$$f(x) = c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + \dots$$

untuk semua x dalam suatu interval di sekitar a , maka

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

(Valberg, Purcell, & Rigdon, 2011).

Untuk menentukan pendekatan solusi, harus dikembangkan deret pangkat dari parameter. Ekspansi deret pangkat biasanya

menghasilkan deret Taylor. Dalam membangun pendekatan orde pertama, dapat diasumsikan bahwa ketergantungan solusi pada ϵ dapat ditentukan dengan menggunakan deret Taylor pada $\epsilon = 0$.

Jika sebuah fungsi $f(\epsilon)$ mempunyai turunan tak terhingga pada $\epsilon = \epsilon_0$, deret pangkat dari $(\epsilon - \epsilon_0)$ dapat ditulis sebagai:

$$f(\epsilon) = a_0 + a_1(\epsilon - \epsilon_0) + a_2(\epsilon - \epsilon_0)^2 + a_3(\epsilon - \epsilon_0)^3 + \dots$$

$$f(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\epsilon - \epsilon_0)^n$$

dimana a_n berelasi dengan f dan turunannya di $\epsilon = \epsilon_0$, didapatkan

$$\text{yaitu } a_0 = f(\epsilon_0), a_1 = f'(\epsilon_0), a_2 = \frac{1}{2!}f''(\epsilon_0), a_3 = \frac{1}{3!}f'''(\epsilon_0), \dots$$

sehingga dapat ditulis:

$$f(\epsilon) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^n(\epsilon_0) (\epsilon - \epsilon_0)^n$$

disebut sebagai ekspansi Taylor $f(\epsilon)$ di sekitar $\epsilon = \epsilon_0$ (Nayfeh, 1993).

Menurut Dean dan Dalrymple (1991), dengan menggunakan deret Taylor, maka akan mungkin untuk membangun hubungan antar karakteristik-karakteristik fluida pada dua daerah yang berdekatan.

Selain deret Taylor, ada perangkat matematis lain yang akan sangat membantu memahami nilai limit dari rasio dua fungsi, yaitu aturan L'hospital, seperti yang dijelaskan berikut:

Diberikan $f(\epsilon)$ dan $\phi(\epsilon)$ yang terdiferensialkan dalam interval (ϵ_a, ϵ_b) serta $\phi(\epsilon) \neq 0$ dalam interval tersebut. Misalkan juga

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f'(\epsilon)}{\phi'(\epsilon)} = A,$$

dimana $-\infty < A < \infty$.

Dalam kasus ini,

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(\epsilon)}{\phi(\epsilon)} = A,$$

jika salah satu kondisi berikut berlaku:

- a. $f \rightarrow 0$ dan $\phi \rightarrow 0$ ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, atau
- b. $\phi \rightarrow 0$ ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$.

2. Notasi Orde

Dalam menentukan pendekatan asimtotik, harus diberikan orde, untuk melihat bagaimana fungsi berkelakuan sebagai parameter, khususnya untuk ϵ yang kecil. Sebagai contoh, fungsi $\phi(\epsilon) = \epsilon$ tidak konvergen secepat $\phi(\epsilon) = \epsilon^2$ ketika $\epsilon \rightarrow 0$ dan dibutuhkan notasi/symbol untuk melambangkan fakta ini. Dua symbol yang umum digunakan untuk menggambarkan perilaku dari suatu fungsi $f(\epsilon)$ ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, yaitu "*O*" dan "*o*", disebut 'oh' besar dan 'oh' kecil.

Definisi:

- a. $f = O(\phi)$ saat $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ artinya ada konstanta k_0 dan ϵ_1 (bebas terhadap ϵ) sedemikian sehingga

$$|f(\epsilon)| = k_0|\phi(\epsilon)| \text{ untuk } \epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_1.$$

Bentuk ini dibaca "*f* adalah *big Oh* dari ϕ " saat $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$.

- b. $f = o(\phi)$ saat $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ artinya bahwa setiap δ positif terdapat ϵ_2 (bebas terhadap ϵ) sedemikian sehingga

$$|f(\epsilon)| = \delta|\phi(\epsilon)| \text{ untuk } \epsilon_0 < \epsilon < \epsilon_2.$$

Bentuk ini dibaca "*f* adalah *little Oh* dari ϕ " saat $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$.

Definisi tersebut terlihat rumit, tetapi sebenarnya mudah diaplikasikan. Namun ada cara lain untuk menentukan orde dengan benar yaitu dijelaskan dalam teorema berikut.

Teorema:

Apabila ada dua fungsi yang berbeda, misalkan $f(\epsilon)$ dan $\varnothing(\epsilon)$, dapat dikatakan bahwa:

a. “ f adalah ‘oh’ besar dari \varnothing ” ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$

$$f(\epsilon) = O(\varnothing(\epsilon)) \text{ jika } \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(\epsilon)}{\varnothing(\epsilon)} = L$$

untuk $-\infty < L < \infty$.

b. “ f adalah ‘oh’ kecil dari \varnothing ” ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$

$$f(\epsilon) = O(\varnothing(\epsilon)) \text{ jika } \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(\epsilon)}{\varnothing(\epsilon)} = 0.$$

Fungsi $\varnothing(\epsilon)$ disebut fungsi *gauge*. Himpunan fungsi *gauge* adalah himpunan epsilon pangkat $(1, \epsilon, \epsilon^2, \dots)$ (Nayfeh, 1993).

3. Ekspansi Asimtotik

Misalkan $\delta_n(\epsilon)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, adalah suatu barisan fungsi. Jika $\delta_n(\epsilon) = o(\delta_{n-1}(\epsilon))$ ketika $\epsilon \rightarrow a$, maka barisan $\delta_n(\epsilon)$ dinamakan barisan asimtotik. Contoh : Barisan $\delta_n(\epsilon) = \epsilon^n$ adalah barisan asimtotik karena $\epsilon^n = o(\epsilon^{n-1})$ ketika $\epsilon \rightarrow 0$.

Misalkan $\delta_n(\epsilon)$ adalah suatu barisan asimtotik. Jika fungsi $f(\epsilon)$ dapat ditulis sebagai

$$f(\epsilon) = \sum_{n=0}^N a_n \delta_n(\epsilon) + O(\delta_{N+1}(\epsilon)) \text{ ketika } \epsilon \rightarrow 0,$$

untuk suatu barisan konstanta a_n , maka $f(\epsilon)$ dikatakan mempunyai ekspansi asimtotik. Perhatikan bahwa ekspansi asimtotik di atas dapat ditulis secara tunggal karena setiap a_n dapat dihitung dengan

$$a_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon)}{\delta_0(\epsilon)}, a_n = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(\epsilon) - \sum_{m=0}^{n-1} a_m \delta_m(\epsilon)}{\delta_n(\epsilon)} \text{ untuk } n = 1, 2, \dots$$

Jika $f(x; \epsilon)$ mempunyai ekspansi asimtotik

$$f(x; \epsilon) = \sum_{n=0}^N f_n(x) \delta_n(\epsilon) + O(\delta_{N+1}(\epsilon)) \text{ ketika } \epsilon \rightarrow 0,$$

yang valid untuk setiap x di suatu domain D , maka ekspansi tersebut dikatakan seragam di D . Jika tidak, maka ekspansi tersebut dikatakan tak seragam di suatu subdomain D . Contoh ekspansi asimtotik:

$$\sin(x + \epsilon) = \sin(x) + \epsilon \cos(x) - \frac{1}{2} \epsilon^2 \sin(x) + O(\epsilon^3) \text{ ketika } \epsilon \rightarrow 0$$

valid di setiap $x \in R$, sehingga ia dikatakan seragam untuk semua x . Sedangkan ekspansi asimtotik

$$\sqrt{x + \epsilon} = \sqrt{x} \left(1 + \frac{\epsilon}{2x} - \frac{\epsilon^2}{8x^2} + O(\epsilon^3) \right) \text{ ketika } \epsilon \rightarrow 0,$$

tidak valid ketika $x \rightarrow 0$, sehingga ia dikatakan tak seragam di $x = O(\epsilon)$.

Berikut ada versi lain dari definisi ekspansi asimtotik. Diberikan $f(\epsilon)$ dan $\emptyset(\epsilon)$, dikatakan bahwa $\emptyset(\epsilon)$ adalah pendekatan asimtotik dari $f(\epsilon)$ untuk $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ dimana $f = \emptyset + o(\emptyset)$ untuk $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$. Ditulis $f = \emptyset$ untuk $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$. Dalam hal khusus, $f = \emptyset$ untuk $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ jika $\lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f(\epsilon)}{\emptyset(\epsilon)} = 1$.

Fungsi $\emptyset_1(\epsilon), \emptyset_2(\epsilon), \dots$ disebut urutan asimtotik untuk $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ jika dan hanya jika $\emptyset_{n+1}(\epsilon) = o(\emptyset_n(\epsilon))$ ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$ untuk semua n . Jika $\emptyset_1(\epsilon), \emptyset_2(\epsilon), \dots$ adalah urutan asimtotik, maka $f(\epsilon)$ mempunyai ekspansi asimtotik untuk n , jika dan hanya jika $f(\epsilon) = \sum_{k=1}^n a_k \emptyset_k + o(\emptyset_n)$ untuk $n = 1, 2, \dots$, ketika $\epsilon \rightarrow \epsilon_0$, dimana a_k independen dari ϵ . Dapat ditulis:

$$f(\epsilon) \sim a_1 \emptyset_1(\epsilon) + a_2 \emptyset_2(\epsilon) + \dots + a_n \emptyset_n(\epsilon) \text{ ketika } \epsilon \rightarrow \epsilon_0$$

dengan \emptyset_n disebut fungsi *gauge* (Holmes, 2013).

Untuk menggunakan definisi ini, dibutuhkan ide dari fungsi-fungsi yang tersedia. Ada banyak fungsi yang bisa didapatkan, tetapi dalam hal ini akan difokuskan pada fungsi berikut ini:

- a. $\phi_1 = (\epsilon - \epsilon_0)\alpha$, $\phi_2 = (\epsilon - \epsilon_0)\beta$, $\phi_3 = (\epsilon - \epsilon_0)\gamma, \dots$, dimana $\alpha < \beta < \gamma < \dots$
- b. $\phi_1 = 1, \phi_2 = e - 1/\epsilon, \phi_3 = e - 2/\epsilon, \dots$

Fungsi yang pertama adalah perumuman dari fungsi deret pangkat sedangkan barisan yang kedua akan berguna ketika fungsi-fungsi kecil harus dideskripsikan secara eksponensial.

Prosedur untuk membangun ekspansi asimtotik, misalkan diberikan ϕ_1, ϕ_2, \dots dan ekspansi fungsi berbentuk $f \sim a_1\phi_1(\epsilon) + a_2\phi_2(\epsilon) + \dots$. Dengan ide dasar ini dapat ditentukan koefisien ekspansi dari bentuk berikut:

$$a_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f}{\phi_1},$$

$$a_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f - a_1\phi_1}{\phi_2},$$

$$a_3 = \lim_{\epsilon \rightarrow \epsilon_0} \frac{f - a_1\phi_1 - a_2\phi_2}{\phi_3}.$$

Ini menunjukkan bahwa fungsi *gauge* nya tidak nol untuk ϵ yang dekat dengan ϵ_0 dan limitnya ada (Holmes, 2013).

Dalam kasus, ada fungsi $u(x)$, diberikan ϕ_1, ϕ_2, \dots dan ekspansi fungsi berbentuk $f \sim a_1\phi_1(\epsilon) + a_2\phi_2(\epsilon) + \dots$ dan dimisalkan $\phi_1 = 1, \phi_2 = \epsilon, \phi_3 = \epsilon^2, \dots$ maka diperoleh:

$$u(x) = u_0(x) + \epsilon u_1(x) + \epsilon^2 u_2(x) + \dots$$

Dalam pendekatan perturbasi, diasumsikan bahwa solusi akan bergantung pada kuantitas kecil yang didefinisikan sebagai epsilon (ϵ). Dalam bukunya, Ablowitz dan Clarkson (1991) memberikan asumsi pada persamaan KdV, bahwa amplitude gelombang sangat

kecil, $\epsilon \ll 1$. Artinya, asumsi pada persamaan KdV memenuhi asumsi untuk pendekatan perturbasi. Pada pendekatan ini, solusi linear tidak akan bergantung pada ϵ , sementara solusi orde berikutnya bergantung pada ϵ , orde setelahnya bergantung pada ϵ^2 dan seterusnya, sehingga dapat dibangun kembali dalam bentuk deret pangkat ϵ .

Selanjutnya, dengan menggunakan definisi pendekatan asimtotik, elevasi η diekspansikan sebagai deret pangkat dalam epsilon yaitu:

$$\eta \approx \epsilon\eta^{(1)} + \epsilon^2\eta^{(2)} + \epsilon^3\eta^{(3)} + \dots$$

H. Persamaan Laplace

Ada beberapa ranah yang tidak bisa dipisahkan dari Persamaan Laplace seperti distribusi potensial kecepatan dari fluida tak termampatkan pada daerah yang tidak memiliki sumber fluida maupun pusaran fluida, distribusi suhu dalam kondisi tunak pada daerah yang bebas sumber panas, distribusi potensial listrik pada daerah yang bebas dari muatan listrik, ataupun distribusi potensial gravitasi pada daerah yang bebas massa. Persamaan ini sangat berguna dalam matematika sains, teknik, maupun aplikasi yang berkaitan dengan distribusi potensial seperti yang dipaparkan sebelumnya.

Berbagai cara dapat digunakan untuk menurunkan Persamaan Laplace sesuai dengan hukum-hukum fisis yang berlaku pada bidang aplikasi tertentu. Jika Persamaan Laplace diaplikasikan pada distribusi potensial listrik, maka persamaan tersebut dapat diturunkan dari perumusan Hukum Coulomb dan beberapa

persamaan terkait lainnya. Sama halnya jika persamaan Laplace diaplikasikan pada distribusi potensial gravitasi, maka persamaan tersebut dapat diturunkan dari Hukum Gravitasi Newton dan persamaan lainnya yang berkaitan dengan persamaan medan gravitasi. Begitu juga untuk bidang aplikasi lainnya, Persamaan Laplace dapat diperoleh dari relasi beberapa persamaan terkait.

Penelitian ini membahas mengenai Persamaan KdV (Korteweg-de Vries) dengan Hidrostatika sebagai bidang kajiannya. Persamaan Laplace pada penelitian ini akan diturunkan dari hukum-hukum gerak fluida. Asumsikan bahwa suatu fluida berada dalam suatu wadah tertentu dan bergerak dalam suatu kondisi batas tertentu, yaitu grup partikel fluida ataupun elemen volume fluida dengan kadar tertentu. Massa fluida dalam elemen tersebut tetap atau kekal dalam selang waktu tertentu. Dari asumsi tersebut, hukum kekekalan massa dapat dinyatakan menurut persamaan berikut (Newman, 1999):

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = 0 \quad (2.4)$$

dengan ρ dan dV pada persamaan (2.4) berturut-turut menyatakan massa jenis dan elemen volume dari fluida. Berdasarkan Hukum II Newton, gaya merupakan laju dari perubahan momentum partikal tiap saat ($F = \frac{dp}{dt}$). Gaya yang mungkin muncul pada masalah fluida ini adalah gaya persatuan volume (F_i) yang bekerja pada seluruh elemen volume fluida dan gaya akibat tekanan ($\tau_{ij}n_j$) pada setiap elemen luas yang ada pada elemen volume tersebut. Berdasarkan kriteria gaya tersebut dan perumusan momentum ($p = mu$), Hukum

II Newton pada elemen volume dari fluida dapat ditulis dalam bentuk seperti berikut:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dV = \iint_S \tau_{ij} n_j dS + \iiint_V F_i dV \quad (2.5)$$

dengan u_i adalah kecepatan partikel dari fluida. Persamaan (2.5) terdiri dari integral volume dan integral permukaan, sehingga suku pertama pada ruas kanan dapat dikonversi menjadi integral volume dengan menggunakan teorema divergensi sehingga persamaan (2.5) menjadi:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho u_i dV = \iiint_V \left(\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} + F_i \right) dV. \quad (2.6)$$

Teorema transport dapat digunakan untuk memodifikasi persamaan (2.6) sehingga menghasilkan persamaan-persamaan lainnya yang berkaitan dengan fluida dinamik. Volume fluida yang mengalir sepanjang waktu merupakan jumlah seluruh aliran fluida yang berbentuk fungsi keadaan dan waktu dari elemen volume fluida sendiri. Persamaan transport dari aliran suatu fluida dapat dinyatakan menurut persamaan berikut:

$$I = \iiint_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV \quad (2.7)$$

dengan \mathbf{x} adalah posisi dalam \mathbb{R}^3 . ΔI pada keadaan tertentu dapat dicari dengan mengambil selisih $I(t + \Delta t)$ dengan $I(t)$, dilanjutkan dengan menguraikan $f(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ melalui Ekspansi Taylor serta dengan mengabaikan suku-suku yang bernilai kecil dan mengambil limit yang cenderung menuju nol (suku $O[\Delta t]^2$), sehingga akan

menyebabkan suku-suku dalam ekspansi $f(\mathbf{x}, t + \Delta t)$ yang mengandung $[\Delta t]^2$ juga menuju nol sehingga akan diperoleh:

$$\frac{dI}{dt} = \iiint_V \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right) dV + \iint_S f u_n dS \quad (2.8)$$

dengan u_n adalah kecepatan partikel fluida. Jika persamaan (2.7) disubstitusikan ke persamaan (2.8) dan dengan menerapkan teorema divergensi, maka sekali lagi pada persamaan (2.8) akan diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V f(\mathbf{x}, t) dV = \iiint_V \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (f u_i) \right] dV. \quad (2.9)$$

Hukum Newton II yang dinyatakan oleh persamaan (2.5) dapat ditransformasikan ke bentuk lain dengan menggunakan teorema transport dan dengan membagi persamaan tersebut dengan u_i sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV = \iiint_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) \right] dV. \quad (2.10)$$

Persamaan (2.10) merupakan persamaan kontinuitas dan bernilai nol. Hal tersebut dikarenakan jumlah fluida yang melewati suatu luasan tertentu setiap saat selalu tetap/konstan. Persamaan (2.10) diruas kiri terdapat derivatif terhadap waktu dan hal inilah yang menyebabkan persamaan tersebut bernilai nol. Jika nilai nol dinisbatkan pada persamaan (2.10) untuk ruas kanan, maka 2 suku pada ruas kanan dalam tanda kurung haruslah bernilai nol dan persamaan (2.10) dapat ditulis dalam bentuk:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\rho u_i) = 0. \quad (2.11)$$

Fokus utama dalam konteks ini adalah fluida yang tak termampatkan, dengan kata lain volume elemen fluida yang ditinjau

konstan. Berdasarkan definisi massa jenis, yaitu massa persatuan volume, maka dengan mengasumsikan massa tetap (hukum kekekalan massa) dan volume juga tetap (fluida tak termampatkan) sehingga massa jenis sudah dapat dipastikan tetap setiap saat ($\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$). Persamaan (2.11) bernilai nol dan dihasilkan persamaan baru yang berbentuk:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.12)$$

Dengan menggunakan operator del/nabla, persamaan (2.12) dapat diungkapkan dalam bentuk perkalian titik dari vektor, yaitu:

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (2.13)$$

dengan \vec{v} merupakan vektor kecepatan di R^3 . Sebagaimana dipaparkan sebelumnya bahwa Persamaan Laplace erat kaitannya dengan penyebaran potensial di dalam ruang, yang mana ruang tersebut bebas dari sumber potensial. Secara umum potensial suatu besaran merupakan produk dari suatu medan dari besaran tersebut dengan perpindahan yang memuat distribusi medan. Sebagai contoh, potensial listrik merupakan produk dari medan listrik dengan vektor perpindahan, potensial gravitasi merupakan produk dari medan gravitasi dengan vektor perpindahan, dan sebagainya.

Perumusan Persamaan Laplace dalam penelitian ini berkaitan dengan penggambaran perilaku dari pergerakan fluida, otomatis pergerakan fluida sudah pasti memiliki kecepatan, berarti distribusi potensial dalam konteks ini tentu saja adalah potensial kecepatan (Φ). Berdasarkan definisi potensial secara umum dan dengan dilandasi oleh beberapa contoh di atas, kecepatan yang berkaitan dengan potensial kecepatan dapat dirumuskan menurut persamaan:

$$\vec{v} = \nabla\Phi. \quad (2.14)$$

Jika persamaan (2.14) disubstitusikan ke persamaan (2.13) akan menghasilkan persamaan yang berbentuk:

$$\vec{v} = \nabla\Phi. \quad (2.15)$$

Persamaan (2.15) yang dikenal sebagai Persamaan Laplace yang dapat digunakan untuk melukiskan suatu gelombang permukaan pada suatu fluida homogen, tak kental, tak berotasi, dan tak termampatkan.

I. Persamaan Lengkap

Persamaan yang memodelkan perambatan gelombang air diatas dasar yang rata dapat dituliskan dalam bentuk persamaan berikut (Marwan, 2006):

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.16)$$

dengan x dan z berturut-turut menyatakan komponen horizontal dan vertikal. Persamaan syarat batasnya adalah:

1. Pada dasar kolam yang mana kedalamannya sebesar h dari permukaan, fluida tidak bergerak dalam arah vertikal sehingga kecepatan dalam arah z bernilai nol dan dapat dimodelkan:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = -h. \quad (2.17)$$

2. Setelah terbentuk gelombang dengan ketinggian relatif η terhadap permukaan air ketika dalam keadaan tenang berlaku syarat batas kinematika permukaan bebas, yaitu:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} - u\frac{\partial\eta}{\partial x} - \frac{\partial\Phi}{\partial z} = 0, \quad z = \eta(x, t). \quad (2.18)$$

3. Pengaruh tekanan fluida pada gelombang yang terbentuk di permukaan akan menghasilkan syarat batas dinamik permukaan bebas, yaitu:

$$g\eta - \frac{\partial\Phi}{\partial t} - \frac{1}{2}|\nabla\Phi|^2 = 0, \quad z = \eta(x, t). \quad (2.19)$$

Persamaan (2.16) sampai dengan persamaan (2.19) dikenal sebagai persamaan lengkap.

J. Parameter Gangguan

Fenomena gelombang laut menggambarkan transmisi dari energi dan momentum. Gelombang laut selalu menimbulkan sebuah ayunan air yang bergerak tanpa henti-hentinya pada lapisan permukaan laut dan jarang dalam keadaan sama sekali diam. Hembusan angin sepoi-sepoi pada cuaca yang tenang sekalipun sudah cukup untuk dapat menimbulkan riak gelombang dan dalam keadaan badai yang besar dapat menimbulkan suatu gelombang besar yang dapat mengakibatkan suatu kerusakan. Gerak gelombang dapat dipandang sebagai perpindahan energi dan momentum tanpa perpindahan materi. Satu gelombang terdiri atas titik puncak dan dasar.

Satu gelombang terdiri dari satu puncak dan satu gelombang. Beberapa istilah yang digunakan dalam mempelajari gelombang yaitu amplitudo, periode, frekuensi, panjang gelombang. Amplitudo (A) adalah ketinggian maksimum suatu puncak, atau kedalaman lembah terhadap permukaan air tenang. Periode adalah waktu yang diperlukan gelombang untuk berjalan sejauh satu panjang gelombang. Satuan dari periode adalah detik atau sekon. Frekuensi adalah banyaknya gelombang yang dihasilkan dalam satu detik.

Panjang gelombang (λ) menyatakan jarak yang ditempuh gelombang dalam waktu satu periode. Penelitian ini mengkaji gelombang air dangkal (shallow water waves), dimana kedalaman air jauh lebih kecil dari panjang gelombang permukaan. Beberapa model matematis yang menggambarkan perambatan gelombang permukaan untuk air dangkal akan dibahas lebih detil pada subbab selanjutnya.

Berkaitan dengan gelombang ekstrim diperlukan suatu parameter untuk mengukurnya. Misalkan suatu parameter gangguan sebesar ϵ , maka pengaruhnya pada suatu fungsi dapat dinyatakan dalam bentuk berikut (Nafyeh, 1993):

$$x = x_1 + \epsilon x_2 + \epsilon^2 x_3 + \dots \quad (2.20)$$

Pengaruh parameter gangguan pada suatu model matematika pangkat tinggi, beserta teknik penyelesaian masalahnya dapat digambarkan dalam masalah yang ditulis sebagai berikut:

$$\epsilon x^n = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0 \quad (2.21)$$

dengan a_s tak bergantung pada ϵ dan x, n , dan m merupakan bilangan bulat, dengan $n > m$. Jika persamaan (2.20) disubstitusikan ke persamaan (2.21) dan diperpendek pengungkapannya, maka dapat ditulis menjadi:

$$\begin{aligned} \epsilon (x_1 + \epsilon x_2 + \dots)^n &= a_m (x_1 + \epsilon x_2 + \dots)^m \\ &+ a_{m-1} (x_1 + \epsilon x_2 + \dots)^{m-1} + a_{m-2} (x_1 + \epsilon x_2 + \dots)^{m-2} \\ &+ \dots + a_1 (x_1 + \epsilon x_2 + \dots) + a_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Penjabaran persamaan (2.22) yang disertai dengan mencocokkan pangkat ϵ antara ruas kiri dan kanan akan diperoleh persamaan yang dapat dinyatakan menjadi:

$$\begin{aligned} m x_2^m + [m-1] a_{m-1} x_2^{m-2} + \dots + x_1 x_1 \\ - x_1^n (a_m x_1^m + a_{m-1} x_1^{m-1} + \dots + a_0) \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$+\epsilon(m x_2^m + [m - 1]a_{m-1}x_2^{m-2} + \dots + a_1x_1 - x_1^n) + O(\epsilon^2) = 0$$

dengan $O(\epsilon^2)$ merupakan galat dengan tingkat orde bernilai 2. Solusi persamaan (2.23) diperoleh dengan menyamakan pangkat ϵ antara ruas kiri dan kanan. Solusi x_1 akan berguna bagi penentuan solusi x_2 , solusi x_2 akan berguna untuk penentuan solusi x_3 , dan seterusnya hingga sampai pada orde yang diinginkan. Aplikasi dari parameter gangguan pada suatu permasalahan dapat dilihat pada contoh berikut.

Misalkan diberikan suatu permasalahan $\ddot{x} + x + \epsilon x^3 = 0$, dengan ϵ besaran tak berdimensi yang menggambarkan efek nonlinear. Persamaan (2.20) disubstitusikan ke dalam permasalahan yang diberikan sehingga menghasilkan

$$\ddot{x}_1 + \epsilon \ddot{x}_2 + O(\epsilon^2) + x_1 + \epsilon x_2 + O(\epsilon^2) + \epsilon(x_1 + \epsilon x_2 + O(\epsilon^2))^3 = 0.$$

Pengumpulan pangkat ϵ yang bersesuaian dengan galat sebesar $O(\epsilon^2)$ dapat ditulis

$$\ddot{x}_1 + x_1 + \epsilon(\ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3) + O(\epsilon^2) = 0.$$

Suku-suku yang tak mengandung ϵ akan menghasilkan persamaan

$$\ddot{x}_1 + x_1 = 0.$$

Solusi umum dari persamaan tersebut adalah $x_1 = a_0 \cos(t + \emptyset_0)$, dengan a_0 dan \emptyset_0 merupakan konstanta sembarang. Suku-suku yang mengandung pangkat satu dari ϵ dapat ditulis

$$\ddot{x}_2 + x_2 + x_1^3 = 0.$$

Jika x_1 disubstitusikan ke persamaan di atas maka

$$\begin{aligned} \ddot{x}_2 + x_2 &= -a_0^3 \cos^3(t + \emptyset_0) \\ \ddot{x}_2 + x_2 &= -\frac{3}{4}a_0^3 \cos(t + \emptyset_0) - \frac{1}{4}a_0^3 \cos(3t + 3\emptyset_0). \end{aligned}$$

Solusi untuk x_2 yang mencakup solusi umum dan solusi khusus dapat dituliskan

$$x_2 = a_1 \cos(t + \phi_1) - \frac{3}{8} a_0^3 t \sin(t + \phi_0) + \frac{1}{32} a_0^3 \cos(3t + 3\phi_0).$$

Jika x_1 dan x_2 disubstitusikan ke persamaan (2.20), solusi keseluruhan dengan galat $O(\epsilon^2)$ dapat dinyatakan dalam bentuk

$$x = a_0 \cos(t + \phi_0) + \epsilon \left\{ a_1 \cos(t + \phi_1) - \frac{3}{8} x_0^3 t \sin(t + \phi_0) + \frac{1}{32} x_0^3 \cos(3t + 3\phi_0) \right\} + O(\epsilon^2).$$

dengan a_0 , a_1 , ϕ_0 , dan ϕ_1 merupakan konstanta sembarang yang dapat dicari dengan menggunakan kondisi batas.

K. Persamaan KdV (Korteweg-de Vries)

Suatu model matematika yang memodelkan suatu permasalahan fisis tentunya dibangun berdasarkan faktor-faktor sedemikian rupa sehingga mewakili fenomena tersebut. Asumsi-asumsi, hukum-hukum kekekalan, persamaan matematika dasar pijakan dan sebagainya akan mewarnai satu sama lain dalam memunculkan model matematika baru. Teknik-teknik tak kalah pentingnya dalam pemodelan untuk memangkas rintangan untuk mencapai hasil, yaitu model shahih dari suatu gejala fisis dalam alam semesta. Fenomena gelombang soliton pertama kali diamati oleh John Scott Russel pada tahun 1834 yang mengamati gelombang soliter dalam kanal Edinburg-Glasgow. Dia melakukan eksperimen untuk yang tidak bisa dijelaskan dengan teori gelombang saat itu dan ini berlangsung hingga tahun 1870. Joseph Valentin Boussinesq pada tahun 1871 mengakui secara teori tentang gelombang soliton serta Lord Rayleigh pada tahun 1876. Diederik Johannes Korteweg dan Gustav de Vries pada tahun 1895 mengutip pernyataan Joseph

Valentin Boussinesq dan Lord Rayleigh hingga lahirnya persamaan KdV pada tahun tersebut.

Persamaan KdV diperkenalkan pertama kali oleh Korteweg dan de Vries (1895) ini menggambarkan perambatan satu arah gelombang air permukaan secara sederhana dan memiliki solusi yang disebut soliton (Debnath, 2012). Soliton adalah gelombang soliter yang tetap mempertahankan bentuk dan kecepatannya setelah terjadi interaksi (tubrukan) dengan gelombang soliter lainnya atau bahkan dengan gelombang terlokalisasi lainnya (Rosita, 2016). Gelombang air hasil penurunan dari persamaan KdV merupakan gelombang air dangkal (shallow water waves) dengan panjang gelombang yang besar (Hereman, 2013).

Persamaan KdV memiliki kelemahan untuk diterapkan pada laboratorium hidrodinamika karena hanya dapat memodelkan gelombang dengan bilangan gelombang kecil, sementara kriteria gelombang yang dibutuhkan pada laboratorium hidrodinamika adalah gelombang pendek dengan bilangan gelombang besar. Akan tetapi, gelombang KdV menjadi tidak stabil untuk bilangan gelombang besar. Arah rambat gelombang dengan bilangan gelombang besar menunjukkan perambatan gelombang ke arah x -negatif sehingga bertentangan dengan asumsi bahwa gelombang merambat satu arah ke x -positif (Myint-U, et. al., 2007) dan sebagai perbaikan atas kelemahan persamaan KdV tersebut muncul persamaan KdV eksak yang ditemukan oleh E. Van Groesen pada tahun 1998. Persamaan KdV eksak memiliki relasi dispersi dalam bentuk eksak yang berlaku untuk semua nilai bilangan gelombang

dan menghasilkan arah perambatan gelombang selalu ke arah x -positif.

Jauh sebelum ditemukaannya persamaan KdV eksak telah diusulkan persamaan baru sebagai alternatif untuk mengatasi kelemahan KdV yang dikenal dengan persamaan Benjamin Bona Mahony (BBM) (Benjamin, 1972). Persamaan BBM yang dikemukakan oleh Benjamin, Bona, dan Mahony (1972) ini merupakan perasamaan yang menggambarkan evolusi gelombang satu arah dan memiliki solusi berupa soliton sama halnya dengan persamaan KdV. Namun tidak seperti persamaan KdV, arah rambat gelombang BBM selalu ke arah x -positif sehingga sesuai dengan asumsi gelombang satu arah. Hal tersebut yang membuat persamaan BBM dianggap dapat menjadi alternatif untuk mengatasi kendala yang muncul pada persamaan KdV. Sementara untuk gelombang pendek dengan bilangan gelombang besar, gelombang BBM cenderung tidak merambat sehingga baik bila digunakan sebagai gelombang awal. Meskipun begitu, belum dapat dipastikan bahwa persamaan BBM lebih baik dari persamaan KdV (Debnath, 2012).

Penelitian lebih lanjut mengenai persamaan KdV yang telah dilakukan banyak ahli mengungkapkan bahwa selubung gelombang KdV berevolusi mengikuti persamaan nonlinear chrodinger (NLS). Persamaan NLS juga menggambarkan evolusi gelombang soliter tetapi memiliki perbedaan yang signifikan dengan persamaan KdV. Persamaan KdV menggambarkan gelombang itu sendiri (elevasi permukaan air) sedangkan persamaan NLS menggambarkan selubung grup gelombang. Grup gelombang adalah sekumpulan gelombang lokal yang bergerak dengan kecepatan grup dan

terbentuk dengan superposisi kumpulan gelombang dengan frekuensi berpusat di sekitar satu nilai (Karjanto, 2006). Persamaan NLS memiliki banyak solusi yang menggambarkan berbagai fenomena. Satu dari banyaknya solusi eksak NLS yang sering digunakan dalam pembangkit gelombang ekstrim adalah Soliton on Finite Background (SFB).

Menurut Karjanto (2006) terdapat dua mekanisme yang dapat membangkitkan gelombang ekstrim yaitu; linier focusing atau ketidakstabilan modulasi nonlinier. Ketidakstabilan modulasi menyebabkan kenaikan amplitudo pada gelombang dan SFB dapat merepresentasikan gelombang tipe Benjamin Feir, dimana gelombang tersebut akan mengalami ketidakstabilan modulasi (Ramli, et. al., 2017). Teori gelombang linier memprediksi pertumbuhan eksponensial dari amplitudo gelombang, akan tetapi ketaklinearan membatasi pertumbuhan eksponensial amplitudo dan menghambat peristiwa gelombang ekstrim (Karjanto, 2006). SFB mampu secara lengkap menggambarkan evolusi dari proses ketidakstabilan modulasi karena itu penting untuk menyelidiki karakter dan dinamika sinyal gelombang SFB.

Persamaan KdV merupakan suatu model matematika yang melukiskan gelombang yang merambat pada permukaan air dangkal. Tujuan awal dirumuskannya persamaan tersebut adalah untuk menjelaskan fenomena terbentuknya gelombang air stabil yang merambat pada suatu kanal yang sangat panjang. Fenomena ini pertama kali diamati oleh John Scott Russel pada tahun 1844 (Prayitno, 2012). Hal ini menyebabkan perlunya dibangun asumsi-asumsi logis untuk perairan dangkal. Sebelum kita memasuki

pembahasan tentang asumsi perairan dangkal yang berkaitan dengan Persamaan KdV, salah satu dari asumsi ini diaplikasikan untuk menemukan persamaan c_0 , yaitu persamaan kecepatan gelombang pada perairan dangkal. Solusi dari persamaan Laplace dapat digunakan untuk merumuskan frekuensi sudut dari gelombang yang mana dapat dituliskan dalam bentuk (Dean, 1994):

$$\omega^2 = gk_p \operatorname{tgh}(k_p h). \quad (2.24)$$

Besarnya kecepatan rambat c_0 yang merujuk kepada perumusan kecepatan dasar gelombang dapat ditulis dalam bentuk berikut ini:

$$c_0 = \frac{\omega}{k}. \quad (2.25)$$

Bila ekspansi Taylor yang berwujud Deret MacLaurin diterapkan pada $\operatorname{tgh}(k_p h)$ akan tertuang dalam persamaan di bawah ini, yaitu:

$$\operatorname{tgh}(k_p h) = k_p h - \frac{2}{3}(k_p h)^3 + \dots \quad (2.26)$$

Nilai ω dari persamaan (2.24) yang dipadukan (2.25) dan (2.26) serta pengasumsian pada perairan dangkal ($\mu = h/\lambda_x \ll 1$ atau $(k_p h)^3 \approx 0$) maka nilai c_0 akan berbentuk seperti:

$$c_0 = \sqrt{gh}. \quad (2.27)$$

Persamaan (2.27) muncul dalam persamaan KdV. Untuk lebih jelasnya, berikut ini adalah beberapa asumsi perairan dangkal yang dibangun untuk menyederhanakan permasalahan (Ablowitz, 2011), yaitu:

1. Kedalaman jauh lebih kecil daripada panjang gelombang air yang merambat dalam perairan tersebut, hal ini bermakna bahwa $\mu = h/\lambda_x \ll 1$.

2. Panjang gelombang dalam arah melintang jauh lebih besar daripada panjang gelombang dalam arah penjalaran, hal ini dapat dinyatakan dalam bentuk $\delta = \lambda_x/\lambda_y \ll 1$.
3. Gelombang perairan dangkal berwujud gelombang permukaan dengan amplitudo kecil, hal ini akan menghasilkan magnitudo perbandingan yang berwujud $|\varepsilon| = a/h \ll 1$.
4. Keseimbangan maksimal dari efek dispersi lemah dan efek nonlinear lemah dicapai ketika $\varepsilon = \mu^2$.

Berbekal asumsi diatas, persamaan nonlinear dari gelombang permukaan air dangkal, khususnya KdV diturunkan dengan menggunakan parameter gangguan dengan Φ diekspansikan dengan efek nonlinier sebesar ε . Wujud dari ekspansi tersebut dapat dinyatakan seperti berikut:

$$\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \varepsilon^2\Phi_2 + \dots \quad (2.28)$$

Persamaan (2.28) dan persamaan lengkap yang diproses sedemikian rupa seperti penondimensian, pengabaian suku-suku kecil, kalkulasi operator diferensial parsial, dan sebagainya, maka didapat persamaan gelombang nonlinear berikut:

$$A_{tt} - A_{xx} = \varepsilon \left(\frac{1}{3}A_{xxxx} - 2A_x A_{xt} - A_{xx} A_{xt} \right) \quad (2.29)$$

dengan $A = A(x, t) = \Phi_0$. Jika A diekspansikan lagi dengan efek nonlinier sebesar ε , maka wujud dari ekspansi tersebut akan identik dengan persamaan (2.27) dan dapat dinyatakan seperti berikut:

$$A = A_0 + \varepsilon A_1 + \varepsilon^2 A_2 + \dots \quad (2.30)$$

Proses matematika yang berwujud substitusi, pemisahan orde, penggunaan solusi umum persamaan gelombang, pengabaian suku-suku kecil, penggunaan operator diferensial parsial, asumsi-asumsi serta pendimensian kembali maka didapat persamaan berikut:

$$\eta_t + c_0 \eta_x + \frac{3c_0}{2h} \eta \eta_x + \frac{1}{6} c_0 h^2 \eta_{xxx} = 0 \quad (2.31)$$

dengan $c_0 = \sqrt{gh}$ merupakan kecepatan perambatan gelombang di perairan dangkal, h menggambarkan kedalaman dari perairan itu sendiri, sedangkan η merupakan simpangan gelombang.

BAB III METODE PENELITIAN

A. Alat dan Bahan Penelitian

Ide utama dari penelitian ini adalah untuk mendapatkan solusi dari model matematika gelombang permukaan, yaitu Persamaan KdV. Solusi ini didapat dengan cara menggunakan parameter gangguan dalam bentuk ekspansi asimtotik. Berdasarkan ide utama penelitian ini tentunya alat dan bahan yang digunakan tentunya adalah komputer, software Matlab, data HUBRIS dan jurnal pembanding (Marwan, 2010), dan buku-buku yang tertera di daftar pustaka.

B. Tempat Penelitian

Penelitian ini direncanakan akan berlangsung selama 5 bulan yaitu dari bulan Juni 2020 sampai dengan Oktober 2020. Penelitian ini melibatkan solusi semi analitik orde ke-5 dari ekspansi asimtotik dari suatu model matematika, yaitu persamaan KdV *termodifikasi*, tentunya tempatnya di laboratorium simulasi dan permodelan milik Universitas Syiah Kuala dan Institut Teknologi Bandung. Selain di lab juga bisa dimana saja asal memiliki komputer yang mendukung fasilitas penelitian ini.

C. Variabel Operasional Penelitian

Persamaan parameter gangguan yang menggunakan ekspansi asimtotik hingga orde ke-5 untuk elevasi gelombang yang berbentuk

$$\eta = \varepsilon\eta_1 + \varepsilon^2\eta_2 + \varepsilon^3\eta_3 + \varepsilon^4\eta_4 + \varepsilon^5\eta_5 + \varepsilon^6\eta_6 + \varepsilon^7\eta_7 \quad (3.3.1)$$

Dengan $\eta_1 = a[e^{i\alpha} + e^{i\beta}] + cc$, dengan a merupakan amplitudo gelombang bikromatik dan cc adalah kompleks konjugat, $\alpha = (k_+x - \omega_1t)$ dan $\beta = (k_-x - \omega_2t)$ Sedangkan ε menyatakan perbandingan amplitudo gelombang pada orde satu dengan kedalaman kolam. Dalam penelitian ini, akan ditelaah perubahan profil suatu gelombang selama perambatannya dengan menggunakan persamaan KdV termodifikasi yang dapat dituliskan seperti berikut ini

$$\partial_t \eta + i\Omega(-i\partial_x)\eta + \mu\eta\partial_x\eta = 0 \quad (3.3.2)$$

Persamaan (3.3.2) didapati dengan menerapkan cara *uni directionalisation* pada persamaan (2.4.8) dan μ merupakan koefesien dispersi nonlinier dari medium air. Ω merupakan relasi dispersi linier yang berbentuk $\Omega(k) = k\sqrt{tgh k/k}$. Jika persamaan (3.3.1) disubstitusikan ke persamaan (3.3.2) dan dikelompokkan orde dari ε hingga sampai apada orde ke-5 dapatlah ditulis sebagai

$$\begin{aligned} & \varepsilon (\partial_t \eta_1 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_1 + \varepsilon^2 (\partial_t \eta_2 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_2 + \mu\eta_1\partial_x\eta_1) + \\ & \varepsilon^3 (\partial_t \eta_3 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_3 + \mu[\eta_1\partial_x\eta_2 + \eta_2\partial_x\eta_1]) + \varepsilon^4 (\partial_t \eta_4 + \\ & i\Omega(-i\partial_x)\eta_4 + \mu[\eta_1\partial_x\eta_3 + \eta_2\partial_x\eta_2 + \eta_3\partial_x\eta_1]) + \varepsilon^5 (\partial_t \eta_5 + \\ & i\Omega(-i\partial_x)\eta_5 + \mu[\eta_1\partial_x\eta_4 + \eta_2\partial_x\eta_3 + \eta_3\partial_x\eta_2 + \eta_4\partial_x\eta_1]) + \\ & O(\varepsilon^6) = 0 \quad (3.3.3) \end{aligned}$$

Dengan parameter μ merupakan koefesiaen nonlinier yang bernilai 1,5. Teknik yang digunakan di atas ternyata menghasilkan resonansi pada orde tinggi ganjil. Untuk itu dilakukan koreksi terhadap bilangan gelombang melalui teknik pengembangan Linstead Poincare (Whitham (1974), dengan menuliskan

$$k_{\pm} = k_{\pm 0} + \varepsilon k_{\pm 1} + \varepsilon^2 k_{\pm 2} + \varepsilon^3 k_{\pm 3} + \varepsilon^4 k_{\pm 4} \quad (3.3.4)$$

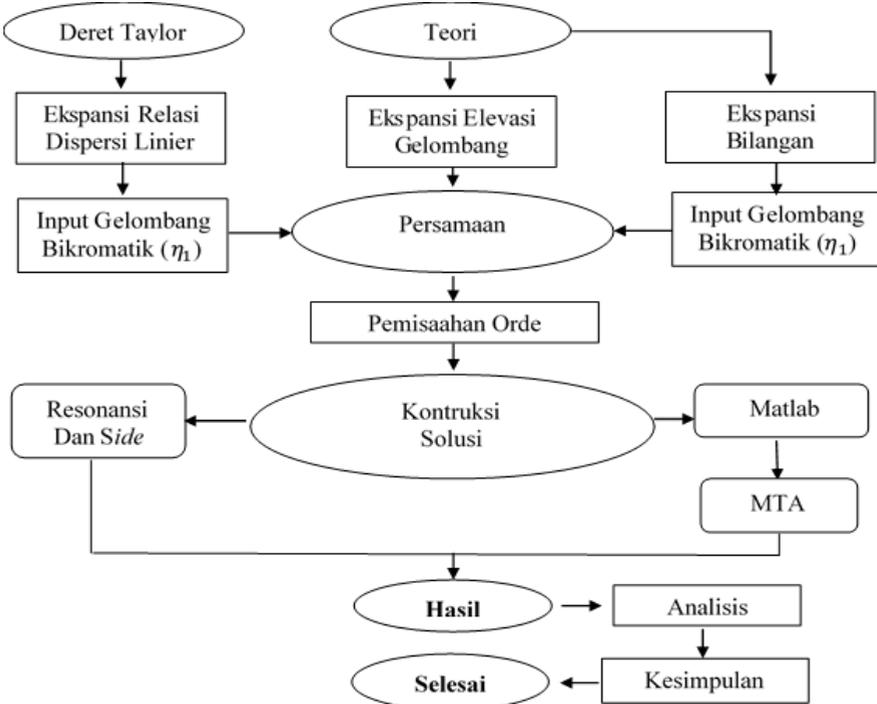
serta $\Omega(k_{\pm})$ itu sendiri dapat diuraikan dalam deret Taylor yang berbentuk :

$$\Omega(k_{\pm}) = \Omega(k_{\pm 0}) + (\varepsilon k_{\pm 1} + \varepsilon^2 k_{\pm 2} + \dots) \Omega'(k_{\pm 0}) + (\varepsilon k_{\pm 1} + \varepsilon^2 k_{\pm 2} + \dots)^2 \Omega''(k_{\pm 0}) + \dots \quad (3.3.5)$$

Pemaduan η_1 , persamaan (3.3.4) dan (3.3.5) ke dalam persamaan (3.3.3) serta penyelesaian tiap orde yang terbentuk akan menghasilkan solusi semi analitik KdV eksak.

D. Prosudur Penelitian

Penggambaran yang sistematis terhadap penelitian ini tak disajikan secara detil dengan pencitraan jelas, tapi semuanya proses dari keseluruhan penelitian ini tergambar melalui skema berikut.



Gambar 3.1. Diagram alir penelitian

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

A. Teknik Pemaduan Persamaan

Pada bagian ini akan diperlihatkan η_1 yang telah diturunkan parsialkan terhadap t dan x , persamaan (3.3.4) dan (3.3.5) disubstitusikan ke dalam persamaan (3.3.3). Hasil substitusi tersebut yang telah dipisahkan ke ordeannya menghasilkan bentuk yang dapat ditulis dalam bentuk:

$$\begin{aligned}
& \varepsilon (-ia[\omega_1 e^{i\alpha} + \omega_2 e^{i\beta}] + ia[\Omega(k_{+0})e^{i\alpha} + \Omega(k_{-0})e^{i\beta}] + cc') + \\
& \varepsilon^2 (\partial_t \eta_2 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_2 + \mu\eta_1 \partial_x \eta_1 + ia[k_{+1}\Omega'(k_{+0})e^{i\alpha} + \\
& k_{-1}\Omega'(k_{-0})e^{i\beta}]) + \varepsilon^3 (\partial_t \eta_3 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_3 + \mu[\eta_1 \partial_x \eta_2 + \\
& \eta_2 \partial_x \eta_1] + ia[k_{+1}^2 \Omega''(k_{+0}) + k_{+2}\Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + ia[k_{-1}^2 \Omega''(k_{-0}) + \\
& k_{-2}\Omega'(k_{-0})]e^{i\beta}) + \varepsilon^4 (\partial_t \eta_4 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_4 + \mu[\eta_1 \partial_x \eta_3 + \\
& \eta_2 \partial_x \eta_2 + \eta_3 \partial_x \eta_1] + ia[k_{+1}^3 \Omega'''(k_{+0}) + 2k_{+1}k_{+2}\Omega''(k_{+0}) + \\
& k_{+3}\Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + [k_{-1}^3 \Omega'''(k_{-0}) + 2k_{-1}k_{-2}\Omega''(k_{-0}) + \\
& k_{-3}\Omega'(k_{-0})]e^{i\beta}) + \varepsilon^5 (\partial_t \eta_5 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_5 + \mu[\eta_1 \partial_x \eta_4 + \\
& \eta_2 \partial_x \eta_3 + \eta_3 \partial_x \eta_2 + \eta_4 \partial_x \eta_1] + ia[k_{+1}^4 \Omega''''(k_{+0}) + \\
& 3k_{+1}^2 k_{+2}\Omega'''(k_{+0}) + (k_{+2}^2 + k_{+1}k_{+3})\Omega''(k_{+0}) + \\
& k_{+4}\Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + ia[k_{-1}^4 \Omega''''(k_{-0}) + 3k_{-1}^2 k_{-2}\Omega'''(k_{-0}) + \\
& (k_{-2}^2 + k_{-1}k_{-3})\Omega''(k_{-0}) + k_{-4}\Omega'(k_{-0})]e^{i\beta}) + \varepsilon^6 (\partial_t \eta_6 + \\
& i\Omega(-i\partial_x)\eta_6 + \mu[\eta_1 \partial_x \eta_5 + \eta_2 \partial_x \eta_4 + \eta_3 \partial_x \eta_3 + \eta_4 \partial_x \eta_2 + \\
& \eta_5 \partial_x \eta_1] + ia\{[k_{+1}^5 \Omega'''''(k_{+0}) + 4k_{+1}^3 k_{+2}\Omega''''(k_{+0}) + \\
& (3k_{+1}k_{+2}^2 + 3k_{+1}^2 k_{+3})\Omega'''(k_{+0}) + (2k_{+2}k_{+3} + \\
& 2k_{+1}k_{+4})\Omega''(k_{+0}) + k_{+5}\Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + [k_{-1}^5 \Omega'''''(k_{-0}) + \\
& 4k_{-1}^3 k_{-2}\Omega''''(k_{-0}) + (3k_{-1}k_{-2}^2 + 3k_{-1}^2 k_{-3})\Omega'''(k_{-0}) +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (2k_{-2}k_{-3} + 2k_{-1}k_{-4})\Omega''(k_{-0}) + k_{-5}\Omega'(k_{-0})]e^{i\beta}\} + \\
& \varepsilon^7(\partial_t\eta_7 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_7 + \mu(\eta_1\partial_x\eta_6 + \eta_2\partial_x\eta_5 + \eta_3\partial_x\eta_4 + \\
& \eta_4\partial_x\eta_3 + \eta_5\partial_x\eta_2 + \eta_6\partial_x\eta_1) + ia\{[k_{+1}^6\Omega''''''(k_{+0}) + \\
& 5k_{+1}^4k_{+2}\Omega''''(k_{+0}) + [6k_{+1}^2k_{+2}^2 + 4k_{+1}^3k_{+3}]\Omega''''(k_{+0}) + \\
& [k_{+2}^3 + 6k_{+1}k_{+2}k_{+3} + 3k_{+1}^2k_{+4}]\Omega'''(k_{+0}) + [k_{+3}^2 + 2k_{+2}k_{+4} + \\
& 2k_{+1}k_{+5}]\Omega''(k_{+0}) + k_{+6}\Omega'(k_{+0})\}e^{i\alpha} + [k_{-1}^6\Omega''''''(k_{-0}) + \\
& 5k_{-1}^4k_{-2}\Omega''''(k_{-0}) + [6k_{-1}^2k_{-2}^2 + 4k_{-1}^3k_{-3}]\Omega''''(k_{-0}) + \\
& [k_{-2}^3 + 6k_{-1}k_{-2}k_{-3} + 3k_{-1}^2k_{-4}]\Omega'''(k_{+0}) + [k_{-3}^2 + 2k_{-2}k_{-4} + \\
& 2k_{-1}k_{-5}]\Omega''(k_{-0}) + k_{-6}\Omega'(k_{-0})\}e^{i\beta}\} + 0(\varepsilon^8) = 0
\end{aligned}
\tag{4.1.1}$$

Tanda aksen pada Ω menandakan turunan Ω terhadap bilangan gelombang k , yang mana orde turunannya sesuai dengan jumlah tanda aksen, sedangkan cc' merupakan turunan parsial cc terhadap x dan t serta i bernilai $\sqrt{-1}$.

1. Solusi Orde Satu

Persamaan orde ke-1 dari persamaan (3.3.3) tanpa input gelombang bikromatik dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\partial_t n_1 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_1 = 0$$

dengan $\eta_1 = a[e^{i\alpha} + e^{i\beta}] + cc$ merupakan solusi dari persamaan (4.2.1). Orde ke 1 dari persamaan (4.1.1) dapat dituliskan dalam bentuk

$$\begin{aligned}
& -ia[\omega_1 e^{i\alpha} + \omega_2 e^{i\beta}] + ia[\Omega(k_{+0})e^{i\alpha} + \Omega(k_{-0})e^{i\beta}] = 0
\end{aligned}
\tag{4.2.2}$$

Penyelesaian persamaan (4.2.2) dapat menghasilkan relasi dispersi antara frekuensi sudut dengan bilangan gelombang pada derajat nol dari ε , yaitu : $\Omega(k_{+0}) = \omega_1$ dan $\Omega(k_{-0}) = \omega_2$. Kedua

hubungan tersebut dapat digunakan untuk mencari k_{+0} dan k_{-0} dengan menggunakan *syntax fzero* di Matlab. Dengan menerapkan rumus Euler pada η_1 dapat menghasilkan bentuk trigonometri dari η_1 yang dinyatakan dalam formula :

$$\eta_1 = 2a[\cos \alpha + \cos \beta] \quad (4.2.3)$$

Dari persamaan 4.2.3 dapat dilihat bahwa hasil dari η_1 setelah diubah ke bentuk geometri hanya mengandung bagian real saja atau cosinus, sedangkan bagian imajinerinya saling meniadakan. Selanjutnya, persamaan orde ke 1 ini akan digunakan pada orde dua pada suku yang mengandung η_1 untuk mendapatkan solusi orde ke dua. Nilai η_1 pada orde satu akan disubstitusikan pada suku yang mengandung μ dan turunan dari η_1 itu sendiri.

2. Solusi Orde Dua

Solusi η_2 dalam penelitian ini diperoleh dari suku persamaan (4.1.1) yang mengandung ε^2 sebagai berikut:

$$\varepsilon^2 (\partial_t \eta_2 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_2 + \mu\eta_1 \partial_x \eta_1 + iak_{+1}\Omega'(k_{+0})e^{i\alpha} + iak_{-1}\Omega'(k_{-0})e^{i\beta}) = 0 \quad (4.3.2)$$

Untuk menyelesaikan persamaan (4.3.2) di atas agar mendapatkan solusi ke dua ialah dengan mensubstitusikan bentuk eksponensial dari orde satu yaitu $\eta_1 = a[e^{i\alpha} + e^{i\beta}] + cc$ pada suku $\mu\eta_1 \partial_x \eta_1$ dan menyamakan suku antara ruas kiri dan ruas kanan yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$. Dengan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan tersebut, akan menghasilkan bilangan gelombang pada derajat satu dari ε , yaitu : $k_{+1} = 0$ dan $k_{-1} = 0$. Kedua nilai bilangan gelombang ini akan digunakan untuk menentukan solusi orde kedua. Dengan menggunakan teknik penyelesaian persamaan diferensial

parsial nonhomogen dan menyederhanakan suku-suku yang ada pada η_2 dengan cara , maka diperoleh solusi untuk orde ke dua yaitu:

$$\eta_2 = a^2[A_1 e^{2i\alpha} + A_2 e^{2i\beta} + A_3 e^{i(\alpha+\beta)} + A_4 e^{i(\alpha-\beta)}] + cc \quad (4.3.3)$$

Dengan menerapkan rumus Euler untuk menyederhanakan eksponensial yang mengandung $i\alpha$ dan $i\beta$ pada η_2 dapat menghasilkan bentuk trigonometri dari η_2 yang dinyatakan dalam formula:

$$\eta_2 = 2a^2[A_1 \cos 2\alpha + A_2 \cos 2\beta + A_3 \cos(\alpha + \beta) + A_4 \cos(\alpha - \beta)] \quad (4.3.4)$$

Persamaan (4.3.4) di atas dikenal sebagai bound wave orde ke-2. Untuk mempertahankan kondisi gelombang bikromatik pada orde 2, maka harus ada *free wave* orde ke-2 yang mempunyai amplitudo dan frekuensi yang sama dengan tiap suku dari pada *bound wave*, hanya saja bilangan gelombangnya merupakan Ω^{-1} dari tiap sukunya. Bentuk *free wave* untuk persamaan (4.3.4) dapat ditulis $\eta_{2f} = 2a^2\{A_1 \cos(k_1x - 2\omega_1t) + A_2 \cos(k_2x - 2\omega_2t) + A_3 \cos(k_3x - [\omega_1 + \omega_2]t) + A_4 \cos(k_4x - [\omega_1 - \omega_2]t)\} \quad (4.3.4)$

3. Solusi Orde Tiga

Dengan teknik yang sama seperti pada solusi untuk η_2 dengan mengambil suku yang terdapat pada suku persamaan (4.1.1) yang mengandung \mathcal{E}^3 , yang mana dapat ditulis

$$\partial_t \eta_3 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_3 + \mu(\eta_1 \partial_x \eta_2 + \partial_x \eta_2) + ia[k_{+1}^2 \Omega''(k_{+0}) + k_{-1}^2 \Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + ia[k_{-1} \Omega''(k_{-0}) + k_{-2} \Omega''(k_{-0})]e^{i\beta} = 0 \quad (4.4.1)$$

Dengan menggunakan nilai-nilai yang diperoleh dari solusi elevasi (η) orde sebelumnya $k_{\pm 1} = 0$, η_1 dan η_2 yang disubstitusikan ke dalam persamaan (4.4.1) dan menyamakan kedua ruas yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ akan diperoleh $k_{\pm 2}$. Suku yang mengandung unsur μ dan η baik η_1 maupun η_2 yang diperoleh pada orde sebelumnya digunakan kembali dengan mensubstitusikan ke dalam persamaan (4.4.1) untuk mendapatkan solusi dari orde 3. Sedangkan suku yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ dengan menyamakan kedua ruas tadi akan menghasilkan bilangan gelombang $k_{\pm 2}$ pada orde ketiga. Adapun bilangan gelombang tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk

$$k_{\pm 2} = - \frac{a^2 \mu (A_{1,2} + A_3 + A_4) k_{\pm 0}}{\Omega'(k_{\pm 0})} \quad (4.4.2)$$

$$k_{\pm 2} = F_{1,2} k_{\pm 0}$$

$$F_{1,2} = - \frac{a^2 \mu (A_{1,2} + A_3 + A_4)}{\Omega'(k_{\pm 0})}$$

A_1 dalam persamaan (4.4.2) digunakan untuk penentuan k_{+2} sedangkan A_2 untuk penentuan k_{-2} dan nilai $k_{\pm 2}$ dapat mereduksi suku $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ dari η_3 . Solusi η_3 diperoleh dengan teknik penyelesaian persamaan diferensial parsial nonhomogen seperti pada orde ke-2 dan dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\eta_3 = a^3 [B_1 e^{3i\alpha} + B_2 e^{3i\beta} + B_3 e^{i(2\alpha+\beta)} + B_4 e^{i(\alpha+2\beta)} + B_5 e^{i(2\alpha-\beta)} + B_6 e^{i(\alpha-2\beta)}] + cc \quad (4.4.3)$$

Adapun nilai $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5,$ dan B_6 diperoleh dengan menyederhanakan suku-suku yang ada pada orde 3 yang mengandung nilai A . Dengan menggunakan rumus euler pada solusi orde ketiga untuk menyederhanakan bentuk eksponensial ke dalam

bentuk trigonometri seperti pada orde dua, diperoleh persamaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_3 = 2a^3 [& B_1 \cos 3\alpha + B_2 \cos 3\beta + B_3 \cos(2\alpha + \beta) \\ & + B_4 \cos(\alpha + 2\beta) + B_5 \cos(2\alpha - \beta) + B_6 \cos(\alpha - 2\beta)] \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Selanjutnya, persamaan gelombang *free wave* untuk orde 3 yang diperoleh dari persamaan (4.4.4) di atas diperoleh dengan cara yang sama seperti gelombang *free wave* orde ke-2, indeks k mengikuti nilai indeks dari orde-orde sebelumnya. Persamaan tersebut dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_{3f} = 2a^3 \{ & B_1 \cos(k_5 x - 3\omega_1 t) + B_2 \cos(k_6 x - 3\omega_2 t) + B_3 \cos(k_7 x - \\ & [2\omega_1 + \omega_2]t) + B_4 \cos(k_8 x - [\omega_1 + 2\omega_2]t) + B_5 \cos(k_9 x - [2\omega_1 - \omega_2]t) + \\ & B_6 \cos(k_{10} x - [\omega_1 - 2\omega_1]t) \} \end{aligned} \quad (4.3.4)$$

Adapun solusi orde tiga ini akan digunakan untuk mendapatkan solusi dari orde selanjutnya yaitu orde empat.

4. Solusi Orde Empat

Adapun solusi untuk orde 4 ini diperoleh dengan cara yang sama seperti pada orde 3 yaitu mengambil suku yang mengandung unsur \mathcal{E}^4 dari persamaan (4.1.1). Dengan teknik yang sama seperti pada solusi untuk η_3 , dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \partial_t \eta_4 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_4 + \mu(\eta_1 \partial_x \eta_3 + \eta_2 \partial_x \eta_2 + \\ & \eta_3 \partial_x \eta_1) + ia[k_{+1}^3 \Omega'''(k_{+0}) + 2k_{+1} k_{+2} \Omega''(k_{+0}) + \\ & k_{+1} \Omega'(k_{+0})] e^{i\alpha} + [k_{-1}^3 \Omega'''(k_{-0}) + 2k_{-1} k_{-2} \Omega''(k_{-0}) + k_{-1} \Omega'(k_{-0})] e^{i\beta} = 0 \end{aligned} \quad (4.5.1)$$

Untuk mendapatkan solusi dari orde empat, terlebih dahulu unsur-unsur dari suku $(\eta_1 \partial_x \eta_3 + \eta_2 \partial_x \eta_2 + \eta_3 \partial_x \eta_1)$ disubstitusikan

dan diselesaikan dengan cara menyatukan unsur-unsur yang mengandung eksponen yang sama. Setelah disatukan setiap suku yang memiliki pangkat yang sama, kemudian memeriksa suku yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ dari suku-suku tersebut yang kemudian disubstitusikan pada persamaan (4.5.1) dan akan digunakan untuk mencari bilangan gelombang $k_{\pm 3}$ pada orde empat. Namun, suku $\mu(\eta_1 \partial_x \eta_3 + \eta_2 \partial_x \eta_2 + \eta_3 \partial_x \eta_1)$ ketika disubstitusikan ke persamaan (4.5.1) tak menghasilkan unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$, hal ini menyebabkan $k_{\pm 3} = 0$. Disamping itu juga $k_{\pm 1} = 0$ sehingga suku-suku yang mengandung Ω dan turunannya tereduksi dari persamaan (4.5.1) dan solusi η_4 diperoleh

$$\eta_4 = a^4 [C_1 e^{4i\alpha} + C_2 e^{2i\alpha} + C_3 e^{4i\beta} + C_4 e^{2i\beta} + C_5 e^{i(3\alpha+\beta)} + C_6 e^{i(2\alpha+2\beta)} + C_7 e^{i(\alpha+3\beta)} + C_8 e^{i(\alpha+\beta)} + C_9 e^{i(3\alpha-\beta)} + C_{10} e^{i(2\alpha-2\beta)} + C_{11} e^{i(\alpha-3\beta)} + C_{12} e^{i(\alpha-\beta)}] + cc \quad (4.5.2)$$

Kemudian, persamaan (4.5.2) di atas disederhanakan kembali dengan menggunakan rumus euler untuk mengubah bentuk eksponensial yang terdapat pada setiap sukunya menjadi bentuk cosinus. Adapun bentuk sederhana η_4 yang berwujud trigonometri dapat dituliskan dalam bentuk seperti dibawah ini:

$$\eta_4 = 2a^4 [C_1 \cos 4\alpha + C_2 \cos 2\alpha + C_3 \cos 4\beta + C_4 \cos 2\beta + C_5 \cos(3\alpha + \beta) + C_6 \cos(2\alpha + 2\beta) + C_7 \cos(\alpha + 3\beta) + C_8 \cos(\alpha + \beta) + C_9 \cos(3\alpha - \beta) + C_{10} \cos(2\alpha - 2\beta) + C_{11} \cos(\alpha - 3\beta) + C_{12} \cos(\alpha - \beta)] \quad (4.5.3)$$

Persamaan free wave dari (4.5.4) di atas diperoleh dengan cara yang sama seperti *free wave* orde ke-2 dan dapat ditulis

$$\eta_{4f} = 2a^4 \{C_1 \cos(k_{11}x - 4\omega_1 t) + C_2 \cos(k_{12}x - 2\omega_1 t) + C_3 \cos(k_{13}x - 4\omega_2 t) + C_4 \cos(k_{14}x - 2\omega_2 t) + C_5 \cos(k_{15}x -$$

$$\begin{aligned}
& [3\omega_1 + \omega_2]t) + C_6 \cos(k_{16}x - [2\omega_1 + 2\omega_2]t) + C_7 \cos(k_{17}x - \\
& [\omega_1 + 3\omega_2]t) + C_8 \cos(k_{18}x - [\omega_1 + \omega_2]t) + C_9 \cos(k_{19}x - [3\omega_1 - \omega_2]t) + \\
& C_{10} \cos(k_{20}x - [2\omega_1 - 2\omega_2]t) + C_{11} \cos(k_{21}x - [\omega_1 - 3\omega_2]t) + \\
& C_{12} \cos(k_{22}x - [\omega_1 - \omega_2]t) \} \quad (4.5.4)
\end{aligned}$$

5. Solusi Orde 5

Solusi Orde ke-5 diperoleh dari suku yang mengandung \mathcal{E}^5 pada persamaan (4.1.1). Bentuk eksponensial dari $\eta_1, \eta_2, \eta_3,$ dan η_4 yang telah diperoleh pada orde-orde sebelumnya akan disubstitusikan ke persamaan (4.1.1) dan disatukan unsur-unsur yang memiliki pangkat eksponen yang sama dapat menghasilkan solusi eksponensial orde ke-5 (η_5). Persamaan (4.1.1) yang mengandung \mathcal{E}^5 dapat dituliskan dalam bentuk dibawah ini :

$$\begin{aligned}
& \partial_t \eta_5 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_5 + \mu(\eta_1\partial_x\eta_4 + \eta_4\partial_x\eta_1 + \eta_2\partial_x\eta_3 + \eta_3\partial_x\eta_2) + \\
& ia[k_{+1}^4\Omega''''(k_{+0}) + 3k_{+1}^2k_{+2}\Omega''''(k_{+0}) + (k_{+2}^2 + \\
& k_{+1}k_{+3})\Omega''(k_{+0}) + k_{+4}\Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + ia[k_{-1}^4\Omega''''(k_{-0}) + \\
& 3k_{-1}^2k_{-2}\Omega''''(k_{-0}) + (k_{-2}^2 + k_{-1}k_{-3})\Omega''(k_{-0}) + k_{-4}\Omega'(k_{-0})] e^{i\beta} = \\
& 0 \quad (4.6.1)
\end{aligned}$$

Untuk mendapatkan solusi dari orde 5 maka terlebih dahulu mensubstitusikan setiap suku dan bilangan gelombang dari solusi orde-orde sebelumnya. Untuk mendapatkan nilai bilangan gelombang orde ke-5, yaitu mengambil suku yang memiliki pangkat $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ dan menyamakan rusa kiri dan ruas kanan. Kemudian mensubstitusikan nilai bilangan gelombang dari orde sebelumnya ke dalam suku yang mengandung unsur bilangan gelombang. Adapun nilai $k_{\pm 1} = 0$ beserta $k_{\pm 3} = 0$ yang diperoleh dari solusi orde sebelumnya jika disubstitusikan ke persamaan diatas akan

menyisakan suku yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ yaitu $(k_{+2}^2 + k_{+1}k_{+3})\Omega''(k_{+0})e^{i\alpha}$ dan $(k_{-2}^2 + k_{-1}k_{-3})\Omega''(k_{-0})e^{i\beta}$ pada unsur koreksi bilangan gelombang. Seperti halnya orde ganjil sebelumnya orde ke-5 juga mengalami resonansi, koreksi terhadap bilangan gelombang pada orde ini dapat menghasilkan $k_{\pm 4}$ yang berbentuk :

$$k_{\pm 4} = -a^4 \mu \frac{[A_1 B_{2,3} + A_2 B_{4,2} + A_{2,4} B_6 + A_3 B_{3,4} + A_{4,1} B_5 + C_{2,4} + C_7 + C_{12}] k_{\pm 0} + k_{\pm 2}^2 \Omega''(k_{\pm 0})}{\Omega'(k_{\pm 0})} \quad (4.6.2)$$

$$k_{+4} = F_3 k_{+0} + F_4 k_{+2}^2$$

$$k_{-4} = F_5 k_{-0} + F_6 k_{-2}^2$$

Adapun nilai dari $F_3, F_4, F_5,$ dan F_6 dapat dilihat dibawah ini:

$$F_3 = -a^4 \mu \frac{[A_1 B_2 + A_2 B_4 + A_2 B_6 + A_3 B_3 + A_4 B_5 + C_2 + C_7 + C_{12}]}{\Omega'(k_{+0})}$$

$$F_4 = -a^4 \mu \frac{\Omega''(k_{+0})}{\Omega'(k_{+0})}$$

$$F_5 = -a^4 \mu \frac{[A_1 B_3 + A_2 B_2 + A_4 B_6 + A_3 B_4 + A_1 B_5 + C_4 + C_7 + C_{12}]}{\Omega'(k_{-0})}$$

$$F_6 = -a^4 \mu \frac{\Omega''(k_{-0})}{\Omega'(k_{-0})}$$

Koefesien A, B, dan C dengan subkrit yang terdiri dari 2 angka berkoma, mencirikan penentuan k_{+4} untuk angka pertama dan angka kedua untuk k_{-4} . suku-suku dari $\eta_1, \eta_2, \eta_3,$ dan η_4 yang disubstitusikan pada orde 5 diturunkan dengan teknik turunan parsial nonhomogen dan disederhanakan dengan menyatukan setiap suku yang memiliki eksponen yang sama. Setelah suku-suku $\eta_1, \eta_2, \eta_3,$ dan $\eta_4,$ diturunparsialkan terhadap $x,$ disubstitusikan ke persamaan (4.6.1) dan setelah disederhanakan dapat menghasilkan solusi eksponensial η_5 yang berbentuk persamaan dibawah ini, yaitu:

$$\begin{aligned} \eta_5 = a^5 [& D_1 e^{5i\alpha} + D_2 e^{3i\alpha} + D_3 e^{5i\beta} + D_4 e^{3i\beta} + D_5 e^{i(4\alpha+\beta)} + \\ & D_6 e^{i(3\alpha+2\beta)} + D_7 e^{i(2\alpha+3\beta)} + D_8 e^{i(2\alpha+\beta)} + D_9 e^{i(\alpha+4\beta)} + \\ & D_{10} e^{i(\alpha+2\beta)} + D_{11} e^{i(4\alpha-\beta)} + D_{12} e^{i(3\alpha-2\beta)} + D_{13} e^{i(2\alpha-3\beta)} + \\ & D_{14} e^{i(2\alpha-\beta)} + D_{15} e^{i(\alpha-4\beta)} + D_{16} e^{i(\alpha-2\beta)}] + \text{cc} \end{aligned}$$

Sama halnya dengan orde-orde sebelumnya, penyederhanaan solusi orde ke-5 dengan menggunakan Rumus Euler yaitu mengubah bentuk eksponensial ke dalam bentuk trigonometri yang menghasilkan cosinus dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_5 = 2a^5 [& D_1 \cos 5\alpha + D_2 \cos 3\alpha + D_3 \cos 5\beta + D_4 \cos 3\beta \\ & + D_5 \cos(4\alpha + \beta) \\ & + D_6 \cos(3\alpha + 2\beta) + D_7 \cos(2\alpha + 3\beta) \\ & + D_8 \cos(2\alpha + \beta) + D_9 \cos(\alpha + 4\beta) \\ & + D_{10} \cos(\alpha + 2\beta) + D_{11} \cos(4\alpha - \beta) \\ & + D_{12} \cos(3\alpha - 2\beta) \\ & + D_{13} \cos(2\alpha - 3\beta) + D_{14} \cos(2\alpha - \beta) \\ & + D_{15} \cos(\alpha - 4\beta) + D_{16} \cos(\alpha - 2\beta)] \end{aligned}$$

(4.6.4)

Persamaan gelombang free wave dari (4.5.4) di atas diperoleh dengan cara yang sama seperti *free wave* orde-orde sebelumnya dan dapat ditulis

$$\begin{aligned} \eta_{5f} = 2a^5 \{ & D_1 \cos(k_{23}x - 5\omega_1 t) + D_2 \cos(k_{24}x - 3\omega_1 t) + \\ & D_3 \cos(k_{25}x - 5\omega_2 t) + D_4 \cos(k_{26}x - 3\omega_2 t) + D_5 \cos(k_{27}x - \\ & [4\omega_1 + \omega_2]t) + D_6 \cos(k_{28}x - [3\omega_1 + 2\omega_2]t) + D_7 \cos(k_{29}x - \\ & [2\omega_1 + 3\omega_2]t) + D_8 \cos(k_{30}x - [2\omega_1 + \omega_2]t) + D_9 \cos(k_{31}x - \\ & [\omega_1 + 4\omega_2]t) + D_{10} \cos(k_{32}x - [\omega_1 + \omega_2]t) + D_{11} \cos(k_{33}x - \\ & [4\omega_1 - \omega_2]t) + D_{12} \cos(k_{34}x - [3\omega_1 - 2\omega_2]t) + D_{13} \cos(k_{35}x - \\ & [2\omega_1 - 3\omega_2]t) + D_{14} \cos(k_{36}x - [2\omega_1 - \omega_2]t) + D_{15} \cos(k_{37}x - \\ & [\omega_1 - 4\omega_2]t) + D_{16} \cos(k_{38}x - [\omega_1 - 2\omega_2]t) \} \end{aligned}$$

Dengan demikian, solusi semi analitik persamaan KdV hingga orde kelima dengan $\varepsilon = 1$, dapat dinyatakan sebagai :

$$\eta = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_{2f}) + (\eta_3 - \eta_{3f}) + (\eta_4 - \eta_{4f}) + (\eta_5 - \eta_{5f}) \quad (4.6.6)$$

6. Solusi Orde Enam

Adapun solusi untuk orde 6 ini diperoleh dengan cara yang sama seperti pada orde-orde sebelumnya yaitu mengambil suku yang mengandung unsur ε^6 dari persamaan (4.1.1). Dengan teknik yang sama seperti pada solusi untuk orde sebelumnya, dapat dituliskan dalam bentuk sebagai berikut:

$$\begin{aligned} & \varepsilon^6 (\partial_t \eta_6 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_6 + \mu(\eta_1\partial_x\eta_5 + \eta_2\partial_x\eta_4 + \eta_3\partial_x\eta_3 + \\ & \eta_4\partial_x\eta_2 + \eta_5\partial_x\eta_1) + ia\{[k_{+1}^5\Omega''''(k_{+0}) + 4k_{+1}^3k_{+2}\Omega''''(k_{+0}) + \\ & (3k_{+1}k_{+2}^2 + 3k_{+1}^2k_{+3})\Omega'''(k_{+0}) + (2k_{+2}k_{+3} + 2k_{+1}k_{+4})\Omega''(k_{+0}) + \\ & k_{+5}\Omega'(k_{+0})]e^{i\alpha} + [k_{-1}^5\Omega''''(k_{-0}) + 4k_{-1}^3k_{-2}\Omega''''(k_{-0}) + (3k_{-1}k_{-2}^2 + \\ & 3k_{-1}^2k_{-3})\Omega'''(k_{-0}) + (2k_{-2}k_{-3} + 2k_{-1}k_{-4})\Omega''(k_{-0}) + \\ & k_{-5}\Omega'(k_{-0})]e^{i\beta}\}) = 0 \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

Adapun persamaan (4.7.1) tersebut akan disederhanakan untuk mendapatkan solusi orde ke-6. Bentuk $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5$ pada persamaan (4.1.1) yang terkandung dalam ε^6 , akan menghasilkan solusi orde ke-enam. Suku-suku yang diperoleh dari solusi orde-orde sebelumnya disubstitusikan ke dalam $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$, dan η_5 dan disederhanakan dengan menyamatakan setiap suku yang memiliki pangkat yang sama. Setelah disatukan setiap suku yang memiliki pangkat yang sama, kemudian memeriksa suku yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ dari suku-suku tersebut yang kemudian disubstitusikan pada persamaan (4.7.1) dan akan digunakan untuk

mencari bilangan gelombang $k_{\pm 3}$ pada orde empat. Namun, suku $\mu(\eta_1 \partial_x \eta_3 + \eta_2 \partial_x \eta_2 + \eta_3 \partial_x \eta_1)$ ketika disubstitusikan ke persamaan (4.7.1) tak menghasilkan unsur e^i dan $e^{i\beta}$, hal ini menyebabkan $k_{\pm 5} = 0$. Disamping itu juga $k_{\pm 1} = 0$ dan $k_{\pm 3} = 0$ sehingga suku-suku yang mengandung Ω dan turunannya tereduksi dari persamaan (4.7.1) dan solusi η_4 diperoleh sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_6 = & a^6 [E_1 e^{6i\alpha} + E_2 e^{4i\alpha} + E_3 e^{2i\alpha} + E_4 e^{6i\beta} + E_5 e^{4i\beta} + E_6 e^{2i\beta} + \\ & E_7 e^{i(5\alpha+\beta)} + E_8 e^{i(4\alpha+2\beta)} + E_9 e^{i(3\alpha+3\beta)} + E_{10} e^{i(3\alpha+\beta)} + E_{11} e^{i(2\alpha+4\beta)} + \\ & E_{12} e^{i(2\alpha+2\beta)} + E_{13} e^{i(\alpha+5\beta)} + E_{14} e^{i(\alpha+3\beta)} + E_{15} e^{i(\alpha+\beta)} + E_{16} e^{i(5\alpha-\beta)} + \\ & E_{17} e^{i(4\alpha-2\beta)} + E_{18} e^{i(3\alpha-3\beta)} + E_{19} e^{i(3\alpha-\beta)} + E_{20} e^{i(2\alpha-4\beta)} + \\ & E_{21} e^{i(2\alpha-2\beta)} + E_{22} e^{i(\alpha-5\beta)} + E_{23} e^{i(\alpha-3\beta)} + E_{24} e^{i(\alpha-\beta)} + \\ & cc \end{aligned} \quad (4.7.2)$$

Persamaan (4.7.2) di atas disederhanakan kembali menggunakan Rumus Euler. Dengan menerapkan rumus euler pada η_6 , menghasilkan bentuk trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_6 = & 2a^6 [E_1 \cos 6\alpha + E_2 \cos 4\alpha + E_3 \cos 2\alpha + E_4 \cos 6\beta + E_5 \cos 4\beta \\ & + E_6 \cos 2\beta + E_7 \cos(5\alpha + \beta) + E_8 \cos(4\alpha + 2\beta) \\ & + E_9 \cos(3\alpha + 3\beta) + E_{10} \cos(3\alpha + \beta) \\ & + E_{11} \cos(2\alpha + 4\beta) + E_{12} \cos(2\alpha + 2\beta) \\ & + E_{13} \cos(\alpha + 5\beta) + E_{14} \cos(\alpha + 3\beta) + E_{15} \cos(\alpha + \beta) \\ & + E_{16} \cos(5\alpha - \beta) + E_{17} \cos(4\alpha - 2\beta) \\ & + E_{18} \cos(3\alpha - 3\beta) \\ & + E_{19} \cos(3\alpha - \beta) + E_{20} \cos(2\alpha - 4\beta) \\ & + E_{21} \cos(2\alpha - 2\beta) + E_{22} \cos(\alpha - 5\beta) \\ & + E_{23} \cos(\alpha - 3\beta) + E_{24} \cos(\alpha - \beta) \end{aligned} \quad (4.7.3)$$

Persamaan *free wave* untuk solusi orde enam dari persamaan (4.7.3), diperoleh dengan cara yang sama seperti pada orde ke dua dan ke empat, dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 \eta_{6f} = & 2a^6 \{ E_1 \cos(k_{39}x - 6\omega_1 t) + E_2 \cos(k_{40}x - 4\omega_1 t) + E_3 \cos(k_{41}x - \\
 & 2\omega_1 t) + E_4 \cos(k_{42}x - 6\omega_2 t) + E_5 \cos(k_{43}x - 4\omega_2 t) + E_6 \cos(k_{44}x - \\
 & 2\omega_2 t) + E_7 \cos(k_{45}x - [5\omega_1 + \omega_2]t) + E_8 \cos(k_{46}x - [4\omega_1 + 2\omega_2]t) + \\
 & E_9 \cos(k_{47}x - [3\omega_1 + 3\omega_2]t) + E_{10} \cos(k_{48}x - [3\omega_1 + \omega_2]t) + \\
 & E_{11} \cos(k_{49}x - [2\omega_1 + 4\omega_2]t) + E_{12} \cos(k_{50}x - [2\omega_1 + 2\omega_2]t) + \\
 & E_{13} \cos(k_{51}x - [\omega_1 + 5\omega_2]t) \} + E_{14} \cos(k_{52}x - [\omega_1 + 3\omega_2]t) + \\
 & E_{15} \cos(k_{53}x - [\omega_1 + \omega_2]t) + E_{16} \cos(k_{54}x - [5\omega_1 - \omega_2]t) + \\
 & E_{17} \cos(k_{55}x - [4\omega_1 - 2\omega_2]t) + E_{18} \cos(k_{56}x - [3\omega_1 - 3\omega_2]t) + \\
 & E_{19} \cos(k_{57}x - [3\omega_1 - \omega_2]t) + E_{20} \cos(k_{58}x - [2\omega_1 - 4\omega_2]t) + \\
 & E_{21} \cos(k_{59}x - [2\omega_1 - 2\omega_2]t) + E_{22} \cos(k_{60}x - [\omega_1 - 5\omega_2]t) + \\
 & E_{23} \cos(k_{61}x - [\omega_1 - 3\omega_2]t) + E_{24} \cos(k_{62}x - [\omega_1 - \omega_2]t) \} \\
 & (4.7.4)
 \end{aligned}$$

7. Solusi Orde Tujuh

Solusi Orde ke-7 diperoleh dari suku yang mengandung \mathcal{E}^7 pada persamaan (4.1.1). Bentuk eksponensial dari $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4$ dan η_5 yang telah diperoleh pada orde-orde sebelumnya akan disubstitusikan ke persamaan (4.1.1) dan disatukan unsur-unsur yang memiliki pangkan eksponen yang sama dapat menghasilkan solusi eksponensial orde ke-5 (η_5). Persamaan (4.1.1) yang mengandung \mathcal{E}^5 dapat dituliskan dalam bentuk dibawah ini :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}^7 (\partial_t \eta_7 + i\Omega(-i\partial_x)\eta_7 + \mu (\eta_1 \partial_x \eta_6 + \eta_2 \partial_x \eta_5 + \eta_3 \partial_x \eta_4 + \eta_4 \partial_x \eta_3 + \\
 \eta_5 \partial_x \eta_2 + \eta_6 \partial_x \eta_1) + ia \{ [k_{+1}^6 \Omega''''''(k_{+0}) + 5k_{+1}^4 k_{+2} \Omega''''(k_{+0}) +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& [6k_{+1}^2 k_{+2}^2 + 4k_{+1}^3 k_{+3}] \Omega''''(k_{+0}) + [k_{+2}^3 + 6k_{+1} k_{+2} k_{+3} + \\
& 3k_{+1}^2 k_{+4}] \Omega''''(k_{+0}) + [k_{+3}^2 + 2k_{+2} k_{+4} + 2k_{+1} k_{+5}] \Omega''(k_{+0}) + \\
& k_{+6} \Omega'(k_{+0})] e^{i\alpha} + [k_{-1}^6 \Omega''''''(k_{-0}) + 5k_{-1}^4 k_{-2} \Omega''''''(k_{-0}) + [6k_{-1}^2 k_{-2}^2 + \\
& 4k_{-1}^3 k_{-3}] \Omega''''(k_{-0}) + [k_{-2}^3 + 6k_{-1} k_{-2} k_{-3} + 3k_{-1}^2 k_{-4}] \Omega''(k_{+0}) \\
& + [k_{-3}^2 + 2k_{-2} k_{-4} + 2k_{-1} k_{-5}] \Omega''(k_{-0}) + k_{-6} \Omega'(k_{-0})] e^{i\beta} \} = 0
\end{aligned}$$

(4.8.1)

Untuk mendapatkan solusi dari orde 7 maka terlebih dahulu mensubstitusikan setiap suku dan bilangan gelombang dari solusi orde-orde sebelumnya pada persamaan (4.8.1). Untuk mendapatkan nilai bilangan gelombang orde ke-5 adalah dengan cara mengambil suku yang memiliki pangkat $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$ dan menyamakan ruas kiri dan ruas kanan. Kemudian mensubstitusikan nilai bilangan gelombang dari orde sebelumnya ke dalam suku yang mengandung unsur bilangan gelombang. Adapun nilai $k_{\pm 1} = 0$ beserta $k_{\pm 3} = 0$ yang diperoleh dari solusi orde sebelumnya jika disubstitusikan ke persamaan diatas akan menyisakan $(k_{+2}^2 + k_{+1} k_{+3}) \Omega''(k_{+0}) e^{i\alpha}$ dan $(k_{-2}^2 + k_{-1} k_{-3}) \Omega''(k_{-0}) e^{i\beta}$ pada unsur koreksi bilangan gelombang. Seperti halnya orde ganjil sebelumnya orde yaitu orde 3 dan orde 5, orde ke-7 juga mengalami resonansi, koreksi terhadap bilangan gelombang pada orde ini dapat menghasilkan $k_{\pm 6}$ yang berbentuk :

$$\begin{aligned}
k_{+6} &= F_7 k_{+0} + F_8 k_{+2}^3 + F_9 k_{+2} k_{+4} \\
(4.8.2)
\end{aligned}$$

Dengan nilai F_7 , F_8 , dan F_9 dapat dilihat di bawah ini $F_8 =$

$$-a^6 \mu \frac{[A_2 D_{16} + A_5 D_2 + A_6 D_{10} + A_7 8 + A_8 D_{14} + B_1 C_4 + B_2 C_{11} + B_3 C_{20} + B_4 C_{16} + B_5 C_{24} + B_6 C_4 + B_7 C_1 + B_8 C_7 + B_9 C_5 + B_{10} C_2]}{E_3 + E_{15} + E_{24}} \Omega'(k_{+0})$$

$$, F_8 = -a^6 \mu \frac{[\Omega''''(k_{+0})]}{\Omega'(k_{+0})}, \text{ dan } F_9 = -a^6 \mu \frac{2[\Omega''(k_{+0})]}{\Omega'(k_{+0})} k_{-6}$$

Adapun nilai dari k_{-6} adalah sebagai berikut:

$$k_{-6} = F_{10}k_{-0} + F_{11}k_{-2}^3 + F_{12}k_{-2}k_{-4} \quad (4.8.3)$$

Dengan nilai F_{10} , F_{11} , dan F_{12} dapat dilihat di bawah ini

$$F_{10} = -a^6\mu \frac{[A_1D_{30}+A_4D_{32}+A_5D_8+A_6D_4+A_7D_{10}+B_1C_{21}+B_2C_{16}+B_3C_{14}+B_4C_{20}+B_5C_{22}+B_6C_{23}+B_7C_5+B_8C_3+B_9C_6+E_6+E_{15}+E_{48}]}{\Omega'(K_{-0})}$$

$$, F_{11} = -a^6\mu \frac{[\Omega'''(k_{-0})]}{\Omega'(k_{-0})}, \text{ dan } F_{12} = -a^6\mu \frac{2[\Omega''(k_{-0})]}{\Omega'(k_{-0})}$$

Nilai F_7 , F_8 , F_9 , F_{10} , F_{11} , dan F_{12} di atas diperoleh setelah menyederhanakan suku-suku yang mengandung unsur $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$. Adapun unsur-unsur yang terdapat F_7 , F_8 , F_9 , F_{10} , F_{11} , dan F_{12} adalah unsur-unsur dari solusi orde-orde sebelumnya.

Setelah mendapatkan nilai dari bilangan gelombang pada orde 7, suku-suku yang telah diturunkan secara parsial terhadap x disatukan suku-suku yang memiliki pangkat yang sama. Setelah menyatukan unsur-unsur dari setiap suku yang memiliki pangkat yang sama, kemudian mensubstitusikan ke dalam persamaan (4.8.1), dan setelah disederhanakan dapat menghasilkan solusi orde tujuh yang dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_7 = & a^7V_1e^{7i\alpha} + a^7V_2e^{5i\alpha} + a^7V_3e^{3i\alpha} + a^7V_4e^{7i\beta} + a^7V_5e^{5i\beta} + \\ & a^7V_6e^{3i\beta} + a^7V_7e^{i(6\alpha+\beta)} + a^7V_8e^{i(5\alpha+2\beta)} + a^7V_9e^{i(4\alpha+3\beta)} + \\ & a^7V_{10}e^{i(4\alpha+\beta)} + a^7V_{11}e^{i(3\alpha+4\beta)} + a^7V_{12}e^{i(3\alpha+2\beta)} + a^7V_{13}e^{i(2\alpha+5\beta)} + \\ & a^7V_{14}e^{i(2\alpha+3\beta)} + a^7V_{15}e^{i(2\alpha+\beta)} + a^7V_{15}e^{i(2\alpha+\beta)} + a^7V_{16}e^{i(\alpha+6\beta)} + \\ & a^7V_{17}e^{i(\alpha+4\beta)} + a^7V_{18}e^{i(\alpha+2\beta)} + a^7V_{19}e^{i(6\alpha-\beta)} + a^7V_{20}e^{i(5\alpha-2\beta)} + \\ & a^7V_{21}e^{i(4\alpha-3\beta)} + a^7V_{22}e^{i(4\alpha-\beta)} + a^7V_{23}e^{i(3\alpha-4\beta)} + a^7V_{24}e^{i(3\alpha-2\beta)} + \\ & a^7V_{25}e^{i(2\alpha-5\beta)} + a^7V_{26}e^{i(2\alpha-3\beta)} + a^7V_{27}e^{i(2\alpha-\beta)} + a^7V_{28}e^{i(\alpha-6\beta)} + \\ & a^7V_{29}e^{i(\alpha-4\beta)} + a^7V_{30}e^{i(\alpha-\beta)} + cc \quad (4.8.4) \end{aligned}$$

Penyederhanaan persamaan (4.8.4) dengan menggunakan rumus euler menghasilkan bentuk trigonometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_7 = & 2a^7 [V_1 \cos 7\alpha + V_2 \cos 5\alpha + V_3 \cos 3\alpha + V_4 \cos 7\beta + V_5 \cos 5\beta + \\ & V_6 \cos 3\beta + V_7 \cos(6\alpha + \beta) + V_8 \cos(5\alpha + 2\beta) + V_9 \cos(4\alpha + 3\beta) + \\ & V_{10} \cos(4\alpha + \beta) + V_{11} \cos(3\alpha + 4\beta) + V_{12} \cos(3\alpha + 2\beta) + V_{13} \cos(2\alpha + \\ & 5\beta) + V_{14} \cos(2\alpha + 3\beta) + V_{15} \cos(2\alpha + \beta) + V_{16} \cos(\alpha + 6\beta) + \\ & V_{17} \cos(\alpha + 4\beta) + V_{18} \cos(\alpha + 2\beta) + V_{19} \cos(6\alpha - \beta) + V_{20} \cos(5\alpha - \\ & 2\beta) + V_{21} \cos(4\alpha - 3\beta) + V_{22} \cos(4\alpha - \beta) + V_{23} \cos(3\alpha - 4\beta) + \\ & V_{24} \cos(3\alpha - 2\beta) + V_{25} \cos(2\alpha - 5\beta) + V_{26} \cos(2\alpha - 3\beta) + \\ & V_{27} \cos(2\alpha - \beta) + V_{28} \cos(\alpha - 6\beta) + V_{29} \cos(\alpha - 4\beta) + V_{30} \cos(\alpha - 2\beta)] \end{aligned} \quad (4.8.5)$$

Persamaan gelombang *free wave* dari (4.8.4) diperoleh dengan cara yang sama seperti *free wave* pada orde-orde sebelumnya dan dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \eta_{7f} = & 2a^7 \{V_1 \cos(k_{63}x - 7\omega_1 t) + V_2 \cos(k_{64}x - 5\omega_1 t) + V_3 \cos(k_{65}x - \\ & 3\omega_1 t) + V_4 \cos(k_{66}x - 7\omega_2 t) + V_5 \cos(k_{67}x - 5\omega_2 t) + V_6 \cos(k_{68}x - \\ & 3\omega_2 t) + V_7 \cos(k_{69}x - [6\omega_1 + \omega_2]t) + V_8 \cos(k_{70}x - [5\omega_1 + 2\omega_2]t) + \\ & V_9 \cos(k_{71}x - [4\omega_1 + 3\omega_2]t) + V_{10} \cos(k_{72}x - [4\omega_1 + \omega_2]t) + \\ & V_{11} \cos(k_{73}x - [3\omega_1 + 4\omega_2]t) + V_{12} \cos(k_{74}x - [3\omega_1 + 2\omega_2]t) + \\ & V_{13} \cos(k_{75}x - [2\omega_1 + 5\omega_2]t) + V_{14} \cos(k_{76}x - [2\omega_1 + 3\omega_2]t) + \\ & V_{15} \cos(k_{77}x - [2\omega_1 + \omega_2]t) + V_{16} \cos(k_{78}x - [\omega_1 + 6\omega_2]t) + \\ & V_{17} \cos(k_{79}x - [\omega_1 + 4\omega_2]t) + V_{18} \cos(k_{80}x - [\omega_1 + 2\omega_2]t) + \\ & V_{19} \cos(k_{81}x - [6\omega_1 - \omega_2]t) + V_{20} \cos(k_{82}x - [5\omega_1 - 2\omega_2]t) + \\ & V_{21} \cos(k_{83}x - [4\omega_1 - 3\omega_2]t) + V_{22} \cos(k_{84}x - [4\omega_1 - \omega_2]t) + \\ & V_{23} \cos(k_{85}x - [3\omega_1 - 4\omega_2]t) + V_{24} \cos(k_{86}x - [3\omega_1 - 2\omega_2]t) + \\ & V_{25} \cos(k_{87}x - [2\omega_1 - 5\omega_2]t) + V_{26} \cos(k_{88}x - [2\omega_1 - 3\omega_2]t) + \\ & V_{27} \cos(k_{89}x - [2\omega_1 - \omega_2]t) + V_{28} \cos(k_{90}x - [\omega_1 - 6\omega_2]t) + \\ & V_{29} \cos(k_{91}x - [\omega_1 - 4\omega_2]t) + V_{30} \cos(k_{92}x - [\omega_1 - 2\omega_2]t) \} \end{aligned}$$

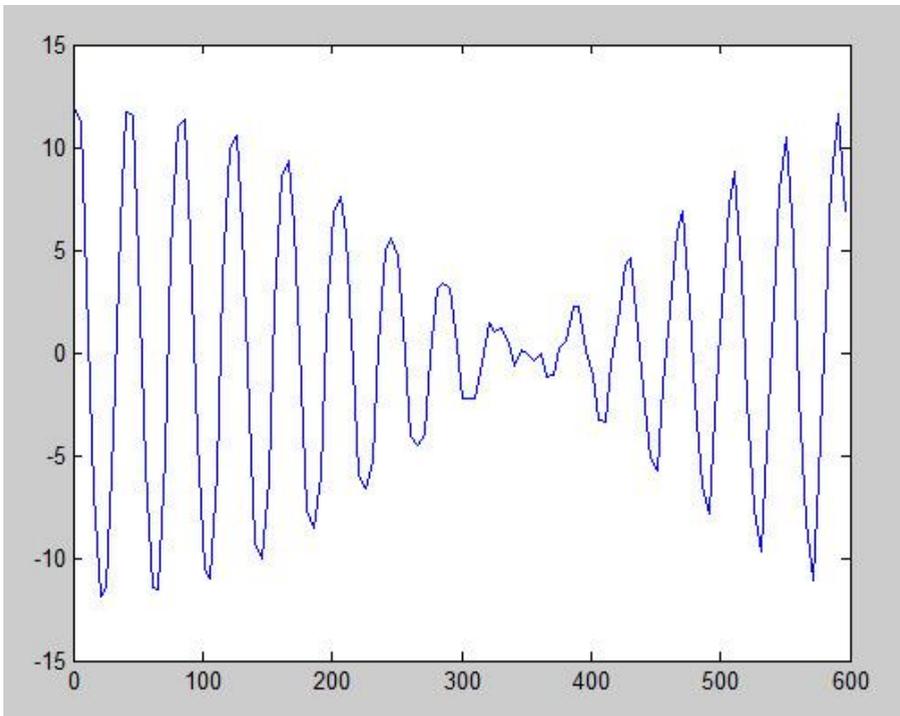
(4.8.6)

Dengan demikian, solusi semi analitik untuk persamaan KDV solusi orde ke-7 dengan $\varepsilon = 1$, dapat dinyatakan sebagai berikut:

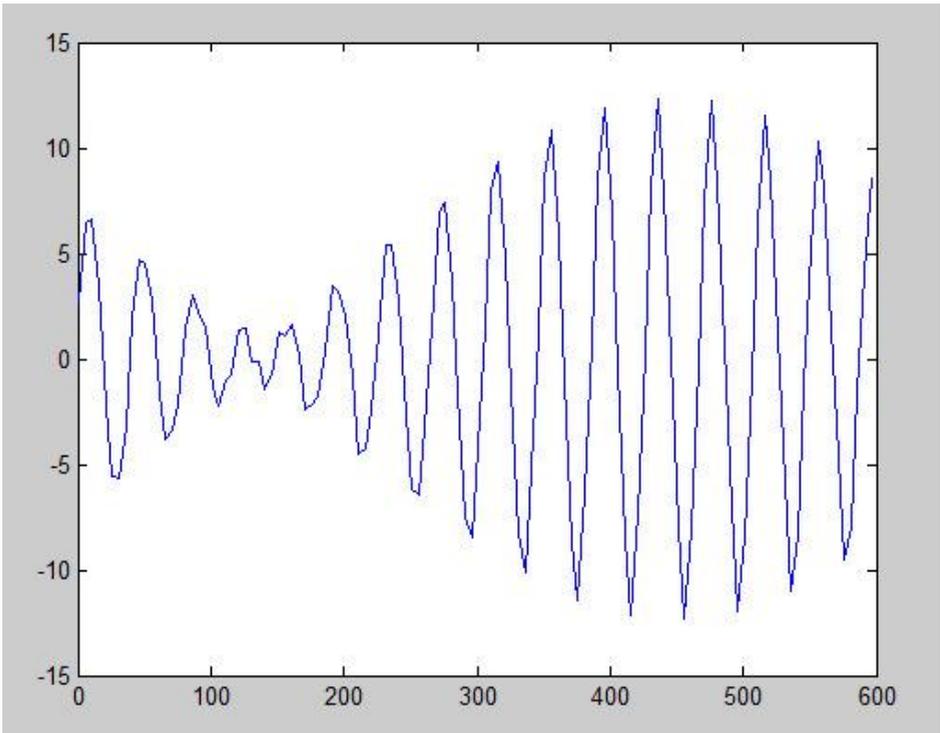
$$\eta = \eta_1 + (\eta_2 - \eta_{2f}) + (\eta_3 - \eta_{3f}) + (\eta_4 - \eta_{4f}) + (\eta_5 - \eta_{5f}) \\ + (\eta_6 - \eta_{6f}) + (\eta_7 - \eta_{7f})$$

(4.8.7)

Hasil Plot Matlab untuk *maximal temporal amplitude* (MTA) untuk η , baik untuk setengah priode pemuncakan dan seperempat priode pemuncakan berbentuk :



Gambar 4.1 grafik MTA dengan panjang kolam 100 m



Gambar 4.2 Grafik MTA dengan panjang kolam 100 m

Dari gambar 4.2 terlihat bahwa pemuncakan gelombang tertinggi untuk pertama kalinya terletak pada $x_{max} = 110$ m dengan FAA sebesar $2,7478 x$, sehingga sesuatu seperti Dean (1990) dan Kjeldsen (1984)

B. Resonansi Dan Side Band

Interaksi yang terjadi pada suku-suku dalam persamaan orde ganjil seperti $\eta_1 \partial_x \eta_2$, $\eta_2 \partial_x \eta_1$, $\eta_2 \partial_x \eta_3$, $\eta_4 \partial_x \eta_1$, dan sebagainya dapat menghasilkan solusi khusus yang mengandung suku $e^{i\alpha}$ dan $e^{i\beta}$. Suku-suku ini tersebar dalam solusi orde 3 dan orde 5, yang mana frekwensi sudutnya dari gelombangnya sama dengan frekwensi gelombang orde 1. Kesamaan frekwensi ini dapat menghasilkan resonansi antara gelombang input dengan gelombang hasil ketaklinieran medium air. Resonansi ini dapat menghasilkan

defomasi terhadap pembentukan gelombang ekstrim. Untuk menghindari resonansi ini dilakukanlah ekspansi bilangan gelombang seperti yang tertera dalam BAB III. Keuntungannya dari suku-suku resonansi tersebut setelah dicocokkan pangkat ε untuk tiap orde bisa digunakan mendapatkan k_{+2} , k_{-2} , k_{+4} , dan k_{-4} yang berguna untuk penentuan k_+ dan k_- sehingga nilai eta (η) diperoleh dalam persamaan fungsi posisi dan waktu.

Orde-orde ganjil ditemukan suku-suku yang frekwensinya berdekatan dengan frekwensi gelombang dari orde 1 untuk solusi orde 3. Suku dengan sudut fase gelombang $i(2\alpha - \beta)$ yang berdekatan frekwensinya dengan suku $i\alpha$ (frekwensi sudutnya ω_1) sebesar Δf ($\Delta f = [\omega_1 - \omega_2]/2\pi = 0,05$ Hz) sedangkan suku $i(2\beta - \alpha)$ berdekatan frekwensinya dengan $i\beta$ (frekwensi sudutnya ω_2) sebesar Δf juga. Untuk orde 5 suku $i(3\alpha - 2\beta)$ berdekatan frekwensinya dengan yang memiliki sudut fase $i(\alpha - 2\beta)$ pada orde 3 sebesar Δf dan $2\Delta f$ dengan suku memiliki sudut fase $i\alpha$ pada orde 1, sedangkan untuk orde 5 suku $i(2\alpha - \beta)$ beresonansi dengan suku yang memiliki sudut fase $i(2\alpha - \beta)$ pada orde 3 dan berdekatan frekwensinya Δf yang memiliki sudut fase $i\alpha$ pada orde 1. Suku pada orde 5 dengan sudut fase $i(3\beta - 2\alpha)$ berdekatan frekwensinya dengan yang memiliki sudut fase $i(2\beta - \alpha)$ pada orde 3 sebesar Δf dan $2\Delta f$ yang memiliki sudut fase $i\beta$ pada orde 1, sedangkan untuk orde 5 suku $i(2\beta - \alpha)$ beresonansi dengan suku yang memiliki sudut fase $i(2\beta - \alpha)$ pada orde 3 dan berdekatan frekwensinya Δf yang memiliki sudut fase $i\beta$ pada orde 1. Keberadaan suku *side band* ini akan menghasilkan perpaduan gelombang pada berbagai orde dan

menghasilkan sel pengumpulan energi. Sel pengumpulan energi inilah yang menjadi alasan kuat terbentuknya gelombang soliton.

C. Tabel Koefesien Dan Bilangan Gelombang

Solusi orde ke-2 hingga orde ke-7 yang tertera pada sub BAB sebelumnya memiliki koefesien yang didapatkan dari penentuan solusi Persamaan KdV dengan menggunakan Teori Gangguan. Solusi eksponensial maupun solusi bentuk triginometri untuk *bound wave* dan *free wave* koefesien tiap ordenya tertera pada tabel 4.1. bilangan gelombang *free wave* yang diperoleh dengan menerapkan fungsi invers dari operator pseudodiferensial Ω^{-1} tertera pada tabel 4.2. kedua tabel tersebut disajikan dalam sub BAB ini.

Tabel 4.1 koefesien dari solusi setiap orde

No	Orde Solusi	Koefesien
1	2	$A_1 = \mu \left(\frac{k_{+0}}{2\omega_1 - \Omega(2k_{+0})} \right)$ $A_2 = \mu \left(\frac{k_{0-}}{2\omega_2 - \Omega(2k_{0-})} \right)$ $A_3 = \mu \left(\frac{(k_{+0} + k_{0-})}{(\omega_1 + \omega_2) - \Omega(k_{0+} + k_{0-})} \right)$ $A_4 = \mu \left(\frac{(k_{+0} - k_{0-})}{(\omega_1 - \omega_2) - \Omega(k_{0+} - k_{0-})} \right)$
2	3	$B_1 = \mu \left(\frac{A_1[3k_{+0}]}{3\omega_1 - \Omega(3k_{+0})} \right)$ $B_2 = \mu \left(\frac{A_2[3k_{0-}]}{3\omega_2 - \Omega(3k_{0-})} \right)$ $B_3 = \mu \left(\frac{[A_1 + A_3][2k_{+0} + k_{0-}]}{(2\omega_1 + \omega_2) - \Omega(2k_{+0} + k_{0-})} \right)$ $B_4 = \mu \left(\frac{[A_2 + A_3][k_{+0} + 2k_{0-}]}{(\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 2k_{0-})} \right)$

		$B_5 = \mu \left(\frac{[A_1 + A_4][2k_{+0} - k_{-0}]}{(2\omega_1 - \omega_2) - \Omega(2k_{+0} - k_{-0})} \right)$ $B_6 = \mu \left(\frac{[A_2 + A_4][k_{+0} - 2k_{-0}]}{(\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega(k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$
3	4	$C_1 = \mu \left(\frac{B_1[4k_{+0}] + A_1^2[2k_{+0}]}{4\omega_1 - \Omega(4k_{+0})} \right)$ $C_2 = \mu \left(\frac{[A_3 A_4 + B_1 + B_3 + B_5][2k_{+0}]}{2\omega_1 - \Omega(2k_{+0})} \right)$ $C_3 = \mu \left(\frac{B_2[4k_{-0}] + A_2^2[2k_{-0}]}{4\omega_2 - \Omega(4k_{-0})} \right)$ $C_4 = \mu \left(\frac{[A_3 A_4 + B_2 + B_4 + B_6][2k_{-0}]}{2\omega_2 - \Omega(2k_{-0})} \right)$ $C_5 = \mu \left(\frac{[A_1 A_3 + B_1 + B_3][3k_{+0} + k_{-0}]}{(3\omega_1 + \omega_2) - \Omega(3k_{+0} + k_{-0})} \right)$ $C_6 = \mu \left(\frac{[A_1 A_2 + B_3 + B_4][2k_{+0} + 2k_{-0}] + A_3^2[k_{+0} + k_{-0}]}{(2\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(2k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$ $C_7 = \mu \left(\frac{[A_2 A_3 + B_2 + B_4][k_{+0} + 3k_{-0}]}{(\omega_1 + 3\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 3k_{-0})} \right)$

		$C_8 = \mu \left(\frac{[A_1 A_4 + A_2 A_4 + B_3 + B_4] [k_{+0} + k_{-0}]}{[\omega_1 + \omega_2] - \Omega (k_{+0} + k_{-0})} \right)$ $C_9 = \mu \left(\frac{[A_1 A_4 + B_1 + B_5] [3k_{+0} - k_{-0}]}{(3\omega_1 - \omega_2) - \Omega (3k_{+0} - k_{-0})} \right)$ $C_{10} = \mu \left(\frac{[A_1 A_2 + B_5 + B_6] [2k_{+0} - 2k_{-0}] + A_4^2 [k_{+0} - k_{-0}]}{(2\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega (2k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$ $C_{11} = \mu \left(\frac{[A_2 A_4 + B_2 + B_6] [k_{+0} - 3k_{-0}]}{(\omega_1 - 3\omega_2) - \Omega (3k_{+0} - k_{-0})} \right)$ $C_{12} = \mu \left(\frac{[A_1 A_3 + A_2 A_3 + B_5 + B_6] [k_{+0} - k_{-0}]}{(\omega_1 - \omega_2) - \Omega (k_{+0} - k_{-0})} \right)$
4	5	$D_1 = \mu \left(\frac{[A_1 B_1 + C_1] (5k_{+0})}{5\omega_1 - \Omega (5k_{+0})} \right)$ $D_2 = \mu \left(\frac{[A_3 B_5 + A_4 B_3 + C_1 + C_2 + C_5 + C_9] [3k_{+0}]}{3\omega_1 - \Omega (3k_{+0})} \right)$ $D_3 = \mu \left(\frac{[A_2 B_2 + C_3] (5k_{-0})}{5\omega_2 - \Omega (5k_{-0})} \right)$ $D_4 = \mu \left(\frac{[A_3 B_6 + A_4 B_4 + C_3 + C_4 + C_8 + C_{11}] [3k_{-0}]}{3\omega_2 - \Omega (3k_{-0})} \right)$ $D_5 = \mu \left(\frac{[A_1 B_3 + A_3 B_1 + C_1 + C_5] [4k_{+0} + k_{-0}]}{(4\omega_1 + \omega_2) - \Omega (4k_{+0} + k_{-0})} \right)$

$$D_6 = \mu \left(\frac{[A_1 B_4 + A_2 B_1 + A_3 B_3 + C_5 + C_6][3k_{+0} + 2k_{-0}]}{(3\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(3k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$D_7 = \mu \left(\frac{[A_1 B_2 + A_2 B_3 + A_3 B_4 + C_6 + C_8][2k_{+0} + 3k_{-0}]}{(2\omega_1 + 3\omega_2) - \Omega(2k_{+0} + 3k_{-0})} \right)$$

$$D_8 = \mu \left(\frac{[A_2 B_5 + A_4 B_1 + A_4 B_4 + C_2 + C_5 + C_6 + C_7][2k_{+0} + k_{-0}]}{(2\omega_1 + \omega_2) - \Omega(2k_{+0} + k_{-0})} \right)$$

$$D_9 = \mu \left(\frac{[A_2 B_4 + A_3 B_2 + C_3 + C_8][k_{+0} + 4k_{-0}]}{(\omega_1 + 4\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 4k_{-0})} \right)$$

$$D_{10} = \mu \left(\frac{[A_1 B_6 + A_4 B_2 + A_4 B_3 + C_4 + C_6 + C_7 + C_8][k_{+0} + 2k_{-0}]}{(\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$D_{11} = \mu \left(\frac{[A_1 B_5 + A_4 B_1 + C_1 + C_9][4k_{+0} - k_{-0}]}{(4\omega_1 - \omega_2) - \Omega(4k_{+0} - k_{-0})} \right)$$

$$D_{12} = \mu \left(\frac{[A_1 B_6 + A_2 B_1 + A_4 B_5 + C_9 + C_{10}][3k_{+0} - 2k_{-0}]}{(3\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega(3k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$$

$$D_{13} = \mu \left(\frac{[A_1 B_2 + A_2 B_5 + A_4 B_6 + C_{10} + C_{11}][2k_{+0} - 3k_{-0}]}{(2\omega_1 - 3\omega_2) - \Omega(2k_{+0} - 3k_{-0})} \right)$$

$$D_{14} = \mu \left(\frac{[A_2 B_3 + A_3 B_1 + A_3 B_6 + C_2 + C_9 + C_{10} + C_{12}][2k_{+0} - k_{-0}]}{(2\omega_1 - \omega_2) - \Omega(2k_{+0} - k_{-0})} \right)$$

		$D_{15} = \mu \left(\frac{[A_2 B_6 + A_4 B_2 + C_3 + C_{11}][k_{+0} - 4k_{-0}]}{(\omega_1 - 4\omega_2) - \Omega(k_{+0} - 4k_{-0})} \right)$ $D_{16} = \mu \left(\frac{[A_1 B_4 + A_3 B_2 + A_3 B_5 + C_4 + C_{10} + C_{11} + C_{12}][k_{+0} - 2k_{-0}]}{(\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega(k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$
5	6	$E_1 = \mu \left(\frac{[A_1 C_1 + D_1][6k_{+0}] + [B_1^2][3k_{+0}]}{6\omega_1 - \Omega(6k_{+0})} \right)$ $E_2 = \mu \left(\frac{[A_1 C_2 + A_3 C_9 + A_4 C_5 + B_3 B_5 + D_1 + D_2 + D_5 + D_{11}][4k_{+0}]}{4\omega_1 - \Omega(4k_{+0})} \right)$ $E_3 = \mu \left(\frac{[A_2 C_{10} + A_3 C_{12} + A_4 C_8 + A_3 C_1 + A_6 C_6 + A_7 C_5 + A_8 C_9 + B_4 B_6 + D_2 + D_4 + D_8][2k_{+0}]}{2\omega_1 - \Omega(2k_{+0})} \right)$ $E_4 = \mu \left(\frac{[A_2 C_3 + D_3][6k_{-0}] + [B_2^2][3k_{-0}]}{6\omega_2 - \Omega(6k_{-0})} \right)$ $E_5 = \mu \left(\frac{[A_2 C_4 + A_3 C_{23} + A_8 C_7 + B_4 B_{12} + D_3 + D_4 + D_9 + D_{31}][4k_{-0}]}{4\omega_2 - \Omega(4k_{-0})} \right)$ $E_6 = \mu \left(\frac{[A_1 C_{22} + A_3 C_{24} + A_4 C_{23} + A_5 C_{26} + A_6 C_3 + A_7 C_7 + A_8 C_8 + B_3 B_{11} + D_4 + D_{10} + D_{32}][2k_{-0}]}{2\omega_2 - \Omega(2k_{-0})} \right)$ $E_7 = \mu \left(\frac{[A_1 C_5 + A_3 C_1 + B_1 B_3 + D_1 + D_5][5k_{+0} + k_{-0}]}{(5\omega_1 + \omega_2) - \Omega(5k_{+0} + k_{-0})} \right)$

$$E_8 = \mu \left(\frac{[A_1 C_6 + A_2 C_1 + A_3 C_5 + B_1 B_4 + D_4 + D_6][4k_{+0} + 2k_{-0}] + [B_3^2][2k_{+0} + 2k_{-0}]}{(4\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(4k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$E_9 = \mu \left(\frac{[A_1 C_7 + A_2 C_5 + A_3 C_6 + B_1 B_2 + B_3 B_4 + D_1 + D_7][3k_{+0} + 3k_{-0}]}{(3\omega_1 + 3\omega_2) - \Omega(3k_{+0} + 3k_{-0})} \right)$$

$$E_{10} = \mu \left(\frac{[A_1 C_8 + A_2 C_9 + A_3 C_2 + A_4 C_6 + A_8 C_1 + B_4 B_5 + D_2 + D_5 + D_6][3k_{+0} + k_{-0}]}{(3\omega_1 + \omega_2) - \Omega(3k_{+0} + k_{-0})} \right)$$

$$E_{11} = \mu \left(\frac{[A_1 C_3 + A_2 C_6 + A_3 C_7 + B_2 B_3 + D_7 + D_9][2k_{+0} + 4k_{-0}] + [B_4^2][k_{+0} + 2k_{-0}]}{(2\omega_1 + 4\omega_2) - \Omega(2k_{+0} + 4k_{-0})} \right)$$

$$E_{12} = \mu \left(\frac{[A_1 C_4 + A_2 C_2 + A_3 C_8 + A_4 C_7 + A_8 C_5 + B_1 B_{12} + B_2 B_5 + D_6 + D_7 + D_8 + D_{10}][2k_{+0} + 2k_{-0}]}{(2\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(2k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$E_{13} = \mu \left(\frac{[A_2 C_7 + A_3 C_3 + B_2 B_4 + D_3 + D_9][k_{+0} + 5k_{-0}]}{(\omega_1 + 5\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 5k_{-0})} \right)$$

$$E_{14} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{23} + A_2 C_8 + A_3 C_4 + A_4 C_3 + A_8 C_6 + B_3 B_{12} + D_4 + D_7 + D_9 + D_{10}][k_{+0} + 3k_{-0}]}{(\omega_1 + 3\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 3k_{-0})} \right)$$

$$E_{15} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{24} + A_2 C_{12} + A_4 C_4 + A_5 C_5 + A_6 C_7 + A_8 C_{12} + B_1 B_{11} + B_2 B_6 + B_5 B_{12} + D_8 + D_{10}][k_{+0} + k_{-0}]}{(\omega_1 + \omega_2) - \Omega(k_{+0} + k_{-0})} \right)$$

$$E_{16} = \mu \left(\frac{[A_1 C_9 + A_4 C_1 + B_1 B_5 + D_1 + D_{11}][5k_{+0} - k_{-0}]}{(5\omega_1 - \omega_2) - \Omega(k_{+0} + 5k_{-0})} \right)$$

$$E_{17} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{10} + A_4 C_9 + A_6 C_1 + B_1 B_6 + D_{11} + D_{12}][4k_{+0} - 2k_{-0}] + [B_5^2][4k_{+0} - 2k_{-0}]}{(4\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega(4k_{+0} - 3k_{-0})} \right)$$

		$E_{18} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{11} + A_4 C_{10} + A_6 C_9 + B_1 B_8 + B_5 B_6 + D_{12} + D_{13}][3k_{+0} - 3k_{-0}]}{(3\omega_1 - 3\omega_2) - \Omega(3k_{+0} - 3k_{-0})} \right)$ $E_{19} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{12} + A_3 C_{10} + A_4 C_2 + A_6 C_5 + A_7 C_1 + B_3 B_6 + D_2 + D_{11} + D_{12} + D_{14}][3k_{+0} - k_{-0}]}{(3\omega_1 - \omega_2) - \Omega(3k_{+0} - k_{-0})} \right)$ $E_{20} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{15} + A_4 C_{11} + A_6 C_{10} + B_5 B_8 + D_{13} + D_{15}][2k_{+0} - 4k_{-0}] + [B_6^2][k_{+0} - 2k_{-0}]}{(2\omega_1 - 4\omega_2) - \Omega(2k_{+0} - 4k_{-0})} \right)$ $E_{21} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{16} + A_3 C_{11} + A_4 C_{12} + A_6 C_2 + A_7 C_9 + B_1 B_{10} + D_{11} + D_{13} + D_{14} + D_{16}][2k_{+0} - 2k_{-0}]}{(2\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega(2k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$ $E_{22} = \mu \left(\frac{[A_4 C_{15} + A_6 C_{11} + B_6 B_8 + D_{15} + D_{19}][k_{+0} - 5k_{-0}]}{(\omega_1 - 5\omega_2) - \Omega(k_{+0} - 5k_{-0})} \right)$ $E_{23} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{19} + A_3 C_{15} + A_4 C_{16} + A_7 C_{10} + B_5 B_{10} + D_3 + D_{15} + D_{16} + D_{20}][k_{+0} - 3k_{-0}]}{(\omega_1 - 3\omega_2) - \Omega(k_{+0} - 3k_{-0})} \right)$ $E_{24} = \mu \left(\frac{[A_1 C_{20} + A_2 C_{11} + A_3 C_{10} + A_5 C_9 + A_6 C_8 + A_7 C_2 + A_8 C_{10} + B_1 B_9 + B_3 B_{10} + B_4 B_8 + D_{14} + D_{16}][k_{+0} - k_{-0}]}{(\omega_1 - \omega_2) - \Omega(k_{+0} - k_{-0})} \right)$
6	7	$V_1 = \mu \left(\frac{[A_1 D_1 + B_1 C_1 + E_1][7k_{+0}]}{7\omega_1 - \Omega(7k_{+0})} \right)$ $V_2 = \mu \left(\frac{[A_1 D_2 + A_3 D_{11} + A_4 D_5 + B_1 C_2 + B_3 C_9 + B_5 C_5 + E_1 + E_2 + E_7 + E_{16}][5k_{+0}]}{5\omega_1 - \Omega(5k_{+0})} \right)$

$$V_3 = \mu \left(\frac{[A_2 D_{12} + A_3 D_{14} + A_4 D_8 + A_5 D_1 + A_6 D_6 + A_7 D_5 + A_8 D_{11} + B_3 C_{12} + B_4 C_{10} + B_5 C_8 + B_6 C_6 + E_2 +]}{3\omega_1 - \Omega (3k_{+0})} \right)$$

$$\frac{E_3 + E_{10} + E_{19}][3k_{+0}]}{3\omega_1 - \Omega (3k_{+0})}$$

$$V_4 = \mu \left(\frac{[A_2 D_3 + B_2 C_3 + E_4][7k_{-0}]}{7\omega_2 - \Omega (7k_{-0})} \right)$$

$$V_5 = \mu \left(\frac{[A_2 D_4 + A_3 D_{31} + A_8 D_9 + B_2 C_4 + B_4 C_{23} + B_{12} C_7 + E_4 + E_5 + E_{13} + E_{46}][5k_{-0}]}{5\omega_2 - \Omega (5k_{-0})} \right)$$

$$V_6 = \mu \left(\frac{[A_1 D_{29} + A_3 D_{32} + A_4 D_{31} + A_5 D_7 + A_6 D_3 + A_7 D_8 + A_8 D_{10} + B_3 C_{22} + B_4 C_{24} + B_{11} C_6 + B_{12} C_8 + E_5 +]}{3\omega_1 - \Omega (3k_{+0})} \right)$$

$$\frac{E_6 + E_{14} + E_{47}][3k_{-0}]}{3\omega_2 - \Omega (3k_{-0})}$$

$$V_7 = \mu \left(\frac{[A_1 D_5 + A_3 D_1 + B_1 C_5 + B_3 C_1 + E_1 + E_7][6k_{+0} + k_{-0}]}{(6\omega_1 + \omega_2) - \Omega (6k_{+0} + k_{-0})} \right)$$

$$V_8 = \mu \left(\frac{[A_1 D_6 + A_2 D_1 + A_3 D_5 + B_1 C_6 + B_3 C_5 + B_4 C_1 + E_7 + E_8][5k_{+0} + 2k_{-0}]}{(5\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega (5k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$V_9 = \mu \left(\frac{[A_1 D_7 + A_2 D_5 + A_3 D_6 + B_1 C_7 + B_2 C_1 + B_3 C_6 + B_4 C_5 + E_8 + E_9][4k_{+0} + 3k_{-0}]}{(4\omega_1 + 3\omega_2) - \Omega (4k_{+0} + 3k_{-0})} \right)$$

$$V_{10} = \mu \left(\frac{[A_1 D_8 + A_2 D_{11} + A_3 D_2 + A_4 D_6 + A_8 D_1 + B_1 C_8 + B_3 C_2 + B_4 C_9 + B_5 C_6 + E_2 + E_7 + E_8 + E_{10}]}{[4k_{+0} + k_{-0}]} \right)$$

$$\frac{]}{(4\omega_1 + \omega_2) - \Omega (4k_{+0} + k_{-0})}$$

$$V_{11} = \mu \left(\frac{[A_1 D_9 + A_2 D_6 + A_3 D_7 + B_1 C_3 + B_2 C_5 + B_3 C_7 + B_4 C_6 + E_9 + E_{11}][3k_{+0} + 4k_{-0}]}{(3\omega_1 + 4\omega_2) - \Omega(3k_{+0} + 4k_{-0})} \right)$$

$$V_{12} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{10} + A_2 D_2 + A_3 D_8 + A_4 D_7 + A_8 D_5 + B_1 C_4 + B_2 C_9 + B_3 C_8 + B_4 C_2 + B_5 C_7 + B_{12} C_1 + E_9 + E_{11}][3k_{+0} + 2k_{-0}]}{(3\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega(3k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$V_{13} = \mu \left(\frac{[A_1 D_3 + A_2 D_7 + A_3 D_9 + B_2 C_6 + B_3 C_3 + B_4 C_7 + E_{11} + E_{13}][2k_{+0} + 5k_{-0}]}{(2\omega_1 + 5\omega_2) - \Omega(2k_{+0} + 5k_{-0})} \right)$$

$$V_{14} = \mu \left(\frac{[A_1 D_4 + A_2 D_8 + A_3 D_{10} + A_4 D_9 + A_8 D_6 + B_1 C_{23} + B_2 C_2 + B_3 C_4 + B_4 C_8 + B_5 C_3 + B_{12} C_5 + E_9 + E_{11} + E_{12} + E_{14}][2k_{+0} + 3k_{-0}]}{(2\omega_1 + 3\omega_2) - \Omega(2k_{+0} + 3k_{-0})} \right)$$

$$V_{15} = \mu \left(\frac{[A_2 D_{14} + A_4 D_{10} + A_5 D_5 + A_6 D_7 + A_7 D_6 + A_8 D_2 + B_1 C_{24} + B_2 C_{10} + B_5 C_4 + B_6 C_7 + B_{11} C_1 + B_{12} C_9 + B_4 C_{12} + E_3 + E_{10} + E_{12} + E_{15}][2k_{+0} + k_{-0}]}{(2\omega_1 + \omega_2) - \Omega(2k_{+0} + k_{-0})} \right)$$

$$V_{16} = \mu \left(\frac{[A_2 D_9 + A_3 D_3 + B_2 C_7 + B_4 C_3 + E_4 + E_{13}][k_{+0} + 6k_{-0}]}{(\omega_1 + 6\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 6k_{-0})} \right)$$

$$V_{17} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{31} + A_2 D_{10} + A_3 D_{14} + A_4 D_3 + A_8 D_7 + B_2 C_8 + B_3 C_{23} + B_4 C_4 + B_{12} C_6 + E_5 + E_{11} + E_{13} + E_{14}][k_{+0} + 4k_{-0}]}{(\omega_1 + 4\omega_2) - \Omega(k_{+0} + 4k_{-0})} \right)$$

$$V_{18} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{32} + A_4 D_4 + A_5 D_6 + A_6 D_9 + A_7 D_7 + A_8 D_8 + B_1 C_{22} + B_2 C_{12} + B_3 C_{24} + B_5 C_{23} + B_6 C_3 + B_{11} C_{5+} + B_{12} C_2 + E_6 + E_{12} + E_{14} + E_{15}][k_{+0} + 2k_{-0}]}{(\omega_1 + 2\omega_2) - \Omega (k_{+0} + 2k_{-0})} \right)$$

$$V_{19} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{11} + A_4 D_1 + B_1 C_9 + B_5 C_1 + E_1 + E_{16}][6k_{+0} - k_{-0}]}{(6\omega_1 - \omega_2) - \Omega (6k_{+0} - k_{-0})} \right)$$

$$V_{20} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{12} + A_4 D_{11} + A_6 D_1 + B_1 C_{10} + B_5 C_9 + B_6 C_1 + E_{16} + E_{17}][5k_{+0} - 2k_{-0}]}{(5\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega (5k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$$

$$V_{21} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{13} + A_4 D_{12} + A_6 D_{11} + B_1 C_{11} + B_5 C_{10} + B_6 C_9 + B_8 C_1 + E_{17} + E_{18}][4k_{+0} - 3k_{-0}]}{(4\omega_1 - 3\omega_2) - \Omega (4k_{+0} - 3k_{-0})} \right)$$

$$V_{22} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{14} + A_3 D_{12} + A_4 D_2 + A_6 D_5 + A_7 D_1 + B_1 C_{12} + B_3 C_{10} + B_5 C_2 + B_6 C_5 + E_2 + E_{16} + E_{17} + E_{19}][4k_{+0} - k_{-0}]}{(4\omega_1 - \omega_2) - \Omega (4k_{+0} - k_{-0})} \right)$$

$$V_{23} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{15} + A_4 D_{13} + A_6 D_{12} + B_1 C_{15} + B_5 C_{11} + B_6 C_{10} + B_8 C_9 + E_{18} + E_{20}][3k_{+0} - 4k_{-0}]}{(3\omega_1 - 4\omega_2) - \Omega (3k_{+0} - 4k_{-0})} \right)$$

$$V_{24} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{16} + A_3 D_{13} + A_4 D_{14} + A_6 D_2 + A_7 D_{11} + B_1 C_{16} + B_2 C_{11} + B_5 C_{12} + B_6 C_2 + B_8 C_5 + B_{10} C_1 + E_{17} + E_{18} + E_{19} + E_{21}][3k_{+0} - 2k_{-0}]}{(3\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega (3k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$$

$$V_{25} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{19} + A_4 D_{15} + A_6 D_{13} + B_5 C_{15} + B_6 C_{11} + B_8 C_{10} + E_{20} + E_{22}][2k_{+0} - 5k_{-0}]}{(2\omega_1 - 5\omega_2) - \Omega (2k_{+0} - 5k_{-0})} \right)$$

$$V_{26} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{20} + A_3 D_{15} + A_4 D_{16} + A_6 D_{14} + A_7 D_{12} + B_1 C_{19} + B_3 C_{15} + B_5 C_{16} + B_6 C_{12} + B_8 C_2 + B_{10} C_9 + E_{18} + E_{20} + E_{21} + E_{23}] [2k_{+0} - 3k_{-0}]}{(2\omega_1 - 3\omega_2) - \Omega (2k_{+0} - 3k_{-0})} \right)$$

$$V_{27} = \mu \left(\frac{[A_2 D_{14} + A_4 D_{10} + A_5 D_5 + A_6 D_7 + A_7 D_6 + A_8 D_2 + B_1 C_{24} + B_2 C_{10} + B_5 C_4 + B_6 C_7 + B_{11} C_1 + B_{12} C_9 + B_4 C_{12} + E_3 + E_{10} + E_{12} + E_{15}] [2k_{+0} + k_{-0}]}{(2\omega_1 + \omega_2) - \Omega (2k_{+0} + k_{-0})} \right)$$

$$V_{28} = \mu \left(\frac{[A_4 D_{19} + A_6 D_{15} + B_6 C_{15} + B_8 C_{11} + E_{22} + E_{28}] [k_{+0} - 6k_{-0}]}{(\omega_1 - 6\omega_2) - \Omega (k_{+0} - 6k_{-0})} \right)$$

$$V_{29} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{25} + A_3 D_{19} + A_4 D_{20} + A_6 D_{16} + A_7 D_{13} + B_5 C_{19} + B_6 C_{16} + B_8 C_{12} + B_{10} C_{10} + E_{20} + E_{22} + E_{23} + E_{29}] [k_{+0} - 4k_{-0}]}{(\omega_1 - 4\omega_2) - \Omega (k_{+0} - 4k_{-0})} \right)$$

$$V_{30} = \mu \left(\frac{[A_1 D_{26} + A_2 D_{15} + A_3 D_{20} + A_5 D_{12} + A_7 D_{14} + A_8 D_{13} + B_1 C_{18} + B_3 C_{19} + B_4 C_{15} + B_5 C_{20} + B_8 C_8 + B_9 C_9 + B_{10} C_2 + E_{21} + E_{23} + E_{24} + E_{30}] [k_{+0} - 2k_{-0}]}{(\omega_1 - 2\omega_2) - \Omega (k_{+0} - 2k_{-0})} \right)$$

Tabel 4.2 Bilangan gelombang untuk *Free Wave* pada tiap ordenya

No	Orde solusi	Bilangan gelombang <i>Free Wave</i>
1	2	$k_1 = \Omega^{-1}(2\omega_1)$ $k_2 = \Omega^{-1}(2\omega_2)$ $k_3 = \Omega^{-1}(\omega_1 + \omega_2)$ $k_4 = \Omega^{-1}(\omega_1 - \omega_2)$
2	3	$k_5 = \Omega^{-1}(3\omega_1)$ $k_6 = \Omega^{-1}(3\omega_2)$ $k_7 = \Omega^{-1}(2\omega_1 + \omega_2)$ $k_8 = \Omega^{-1}(\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_9 = \Omega^{-1}(2\omega_1 - \omega_2)$ $k_{10} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 2\omega_2)$
3	4	$k_{11} = \Omega^{-1}(4\omega_1)$ $k_{12} = \Omega^{-1}(2\omega_1)$ $k_{13} = \Omega^{-1}(4\omega_2)$ $k_{14} = \Omega^{-1}(2\omega_2)$ $k_{15} = \Omega^{-1}(3\omega_1 + \omega_2)$ $k_{16} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{17} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 3\omega_2)$ $k_{18} = \Omega^{-1}(\omega_1 + \omega_2)$ $k_{19} = \Omega^{-1}(3\omega_1 - \omega_2)$

		$k_{20} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - 2\omega_2)$ $k_{21} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 3\omega_2)$ $k_{22} = \Omega^{-1}(\omega_1 - \omega_2)$
4	5	$k_{23} = \Omega^{-1}(5\omega_1)$ $k_{24} = \Omega^{-1}(3\omega_1)$ $k_{25} = \Omega^{-1}(5\omega_2)$ $k_{26} = \Omega^{-1}(2\omega_2)$ $k_{27} = \Omega^{-1}(4\omega_1 + \omega_2)$ $k_{28} = \Omega^{-1}(3\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{29} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + 3\omega_2)$ $k_{30} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + \omega_2)$ $k_{31} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 4\omega_2)$ $k_{32} = \Omega^{-1}(\omega_1 + \omega_2)$ $k_{33} = \Omega^{-1}(4\omega_1 - \omega_2)$ $k_{34} = \Omega^{-1}(3\omega_1 - 2\omega_2)$ $k_{35} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - 3\omega_2)$ $k_{36} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - \omega_2)$ $k_{37} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 4\omega_2)$ $k_{38} = \Omega^{-1}(\omega_1 - \omega_2)$
5	6	$k_{39} = \Omega^{-1}(6\omega_1)$

		$k_{40} = \Omega^{-1}(4\omega_1)$ $k_{41} = \Omega^{-1}(2\omega_1)$ $k_{42} = \Omega^{-1}(6\omega_2)$ $k_{43} = \Omega^{-1}(4\omega_2)$ $k_{44} = \Omega^{-1}(2\omega_2)$ $k_{45} = \Omega^{-1}(5\omega_1 + \omega_2)$ $k_{46} = \Omega^{-1}(4\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{47} = \Omega^{-1}(3\omega_1 + 3\omega_2)$ $k_{48} = \Omega^{-1}(3\omega_1 + \omega_2)$ $k_{49} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + 4\omega_2)$ $k_{50} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{51} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 5\omega_2)$ $k_{52} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 3\omega_2)$ $k_{53} = \Omega^{-1}(\omega_1 + \omega_2)$ $k_{54} = \Omega^{-1}(5\omega_1 - \omega_2)$ $k_{55} = \Omega^{-1}(4\omega_1 - 2\omega_2)$ $k_{56} = \Omega^{-1}(3\omega_1 - 3\omega_2)$ $k_{57} = \Omega^{-1}(3\omega_1 - \omega_2)$ $k_{58} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - 4\omega_2)$ $k_{59} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - 2\omega_2)$ $k_{60} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 5\omega_2)$ $k_{61} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 3\omega_2)$
--	--	---

		$k_{62} = \Omega^{-1}(\omega_1 - \omega_2)$
6	7	$k_{63} = \Omega^{-1}(7\omega_1)$ $k_{64} = \Omega^{-1}(5\omega_1)$ $k_{65} = \Omega^{-1}(3\omega_1)$ $k_{66} = \Omega^{-1}(7\omega_2)$ $k_{67} = \Omega^{-1}(5\omega_2)$ $k_{68} = \Omega^{-1}(3\omega_2)$ $k_{69} = \Omega^{-1}(6\omega_1 + \omega_2)$ $k_{70} = \Omega^{-1}(5\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{71} = \Omega^{-1}(4\omega_1 + 3\omega_2)$ $k_{72} = \Omega^{-1}(4\omega_1 + \omega_2)$ $k_{73} = \Omega^{-1}(3\omega_1 + 4\omega_2)$ $k_{74} = \Omega^{-1}(3\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{75} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + 5\omega_2)$ $k_{76} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + 3\omega_2)$ $k_{77} = \Omega^{-1}(2\omega_1 + \omega_2)$ $k_{78} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 6\omega_2)$ $k_{79} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 4\omega_2)$ $k_{80} = \Omega^{-1}(\omega_1 + 2\omega_2)$ $k_{81} = \Omega^{-1}(6\omega_1 - \omega_2)$ $k_{82} = \Omega^{-1}(5\omega_1 - 2\omega_2)$

		$k_{83} = \Omega^{-1}(4\omega_1 - 3\omega_2)$ $k_{84} = \Omega^{-1}(4\omega_1 - \omega_2)$ $k_{85} = \Omega^{-1}(3\omega_1 - 4\omega_2)$ $k_{86} = \Omega^{-1}(3\omega_1 - 2\omega_2)$ $k_{87} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - 5\omega_2)$ $k_{88} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - 3\omega_2)$ $k_{89} = \Omega^{-1}(2\omega_1 - \omega_2)$ $k_{90} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 6\omega_2)$ $k_{91} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 4\omega_2)$ $k_{92} = \Omega^{-1}(\omega_1 - 2\omega_2)$
--	--	--

$$\eta_{2-4} = \eta_1 + (\eta_{3sb} - \eta_{3fsb}) + (\eta_{5sb} - \eta_{5fsb})$$

$$P = i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$$

$$Q = \frac{1}{2}(\bar{K} - \bar{k})x$$

$$R = \frac{1}{2}(\bar{K}' - \bar{k})x$$

Dengan $P = i(\bar{k}x - \bar{\omega}t)$, $Q = \frac{1}{2}(\bar{K} - \bar{k})x$, dan $R = \frac{1}{2}(\bar{K}' - \bar{k})x$.

Dengan $\bar{K} = \frac{k_9+k_{10}}{2} = \frac{k_{36}+k_{38}}{2}$, $\bar{K}' = \frac{k_{34}+k_{35}}{2}$, dan $\bar{k} = \frac{1}{2}(k_+ + k_-)$. Disamping bentuk di atas, k_{MTA} juga dapat dinyatakan dalam bentuk lain dengan menguraikan $K'(\varpi) = \Omega^{-1}$ dari \bar{K} , \bar{K}' , dan \bar{k} dalam deret Taylor di sekitar v ($v = \frac{1}{2}[\omega_1 - \omega_2]$). Bentuk $k_{MTA}(v)$ dapat ditulis sebagai berikut

$$k_{MTA} = M_1 + M_2v + M_3v^2 + M_4v^3 + M_5v^4 + M_6v^5 + M_7v^6 + O(\varepsilon^7)$$

Dengan M_1 hingga M_7 pada persamaan (4.8.6) dapat dilihat dalam lampiran C. Koefisien M_1 hingga M_7 juga dipengaruhi oleh $K(\omega) = \Omega^{-1}(\omega)$ dan $K'(\omega)$, yang mana $K'(\omega)$ merupakan turunan dari $K(\omega) = \Omega^{-1}(\omega)$ pada titik ϖ ($\varpi = \frac{1}{2}[\omega_1 + \omega_2]$) dengan orde turunan yang bersesuaian dengan jumlah tanda aksennya.

$$\bar{K} = \frac{(k_9 + k_{10})}{2} = \frac{(k_{36} + k_{38})}{2}$$

$$\bar{K}' = \frac{(k_{34} + k_{35})}{2}$$

$$\bar{K}' = \frac{(k_{34} + k_{35})}{2}$$

$$\kappa = \frac{(k_+ - k_-)}{2}$$

$$\tilde{K}' = \frac{(k_{34} - k_{35})}{2}$$

$$\bar{k} = \frac{(k_+ + k_-)}{2}$$

$$x_{max} = \frac{\pi}{k_{MTA}}$$

$$k_{MTA} = \frac{0,5[(\bar{K} - \bar{k}) + (\bar{K}' - \bar{k}')] }{2}$$

$$FAA = 2,7478$$

$$x_{max} = 116,5692 \text{ m}$$

$$k_{MTA} = M_1 + M_2v + M_3v^2 + M_4v^3 + M_5v^4 + O(\varepsilon^5)$$

Berdasarkan penyelidikan perambatan gelombang melalui persamaan KdV yang telah dipaparkan di atas, bahwa solusi semi analitik dengan menggunakan parameter gangguan dari orde ke-1 hingga orde ke-7, melalui dianalisa 2 buah parameter, yaitu MTA (*Maximal Temporal Amplitude*) dan FAA (*Faktor Amplifikasi Amplitudo*) dari gelombang input $\eta(0, t) = 2a \cos(a+\beta) \cos(a-\beta)$ didapat bahwa solusi semi analitik dengan menggunakan parameter gangguan pada orde ke-7 mempunyai pengaruh orde yang lebih tinggi terhadap terbentuknya gelombang. Hal ini dapat dilihat dari *plotting* solusi dalam bentuk grafik sinyal elevasi gelombang yang bergantung waktu (t) dengan nilai x yang tetap ($\eta(x_{fix}, t)$) dan MTA.

BAB V

PENUTUP

A. Kesimpulan

Solusi semi analiti persamaan KdV mulai dari orde satu hingga orde ke tujuh diperoleh dengan mengkombinasikan 7 persamaan yang diperoleh dari persamaan KdV termodifikasi, input gelombang bikromatik η_1 , 2 persamaan ekspansi bilangan gelombang dengan menggunakan teori gangguan dan Deret Taylor serta ekspansi η dengan teori gangguan yang menghasilkan solusi orde ketujuh, baik solusi *Bound wave* maupun solusi *free wave*. Solusi ini berbeda dengan solusi dalam Afriadi(2017) dan Marwan(2010) dalam konteks pengaruh orde yang lebih tinggi. Pengaruh lain dalam didapati pada jarak pemuncakan yang lebih dekat daripada titik awal, hal ini dapat mengindikasikan bahwa orde yang lebih tinggi berpengaruh dari solusi dapat memberikan pengaruh pada pemuncakan maksimum gelombang untuk yang pertama kali. Pemuncakan pertama kali terjadi pada jarak $x = 110$ m untuk solusi orde kelima. Nilai ini berbeda dengan hasil yang terdapat dalam Marwan (2010) sebesar 118 m dan HUBRIS 127 m dengan solusi elevasi hingga orde ketiga.

Pesamaan (4.8.2) menggambarkan $k_{\pm 6}$ yang mengandung $k_{\pm 4}$ dan $k_{\pm 2}$, yang mana bilangan gelombang tersebut menggambarkan jumlah gelombang yang terbentuk tiap meter, peningkatan nilai $k_{\pm 6}$ berbeda dengan Afriadi(2017) dan Marwan(2010), hal ini dikarenakan oleh ekspansi dari Ω yang ordenya lebih tinggi. Jika nilai bilangan gelombang meningkat, pemuncakan gelombang akan terjadi lebih dekat. Tamsilan ini menggambarkan bahwa makin besar

nilai bilangan gelombang, maka pemuncakan pertama dari gelombang akan lebih dekat ke titik asal. Hal ini menunjukkan bahwa MTA tertinggi yang pertama pada gelombang dari solusi ini lebih dekat sekitar 8 meter.

B. Saran

Berdasarkan penelitian ini, Peneliti menyarankan untuk bisa dilakukan penelitian lanjutan dengan meningkatkan jumlah orde dari solusi yang lebih tinggi dari orde ketujuh baik bikromatik ataupun selainnya. Disamping itu juga, suku-suku *side band* untuk orde yang lebih tinggi juga bisa dijadikan untuk penelitian untuk mendapatkan gambaran tentang pengaruh orde yang lebih tinggi secara detail tentang *maximal temporal amplitude* (MTA). Pada orde tinggi, ekspansi Ω dalam Deret Taylor juga diekspansikan dari orde yang lebih tinggi juga, sehingga pengaruh ekspansi bilangan gelombang terhadap elevasi gelombang juga bisa dijadikan kajian yang lebih lanjut dari penelitian ini.

DAFTAR PUSTAKA

- Ablowitz. M.J. 2011. *Nonlinear Dispersive Waves Asymtotic Analysis and Soliton*, New York, Cambridge University Press
- Afriadi, Y. Z., Halfiani, V., Mardi, H. A., & Ramli, M. (2018). Fifth order semi analytical solution of exact Korteweg-de Vries equation. In *J. Phys. Conf. Ser* (Vol. 1116, p. 022002).
- Cahyono, E., "Analytical wave codes for predicting surface waves in a laboratory basin", Ph. D Thesis, Fac. of Mathematical Sciences Univ. of Twente, The Netherlands (2002)
- Dean, R.G. (1990) : *Freak Waves : A Possible Explanation*, *Water Wave Kinetics*, Kluwer, Amsterdam, 609-612
- Dean, R.G. dan Dalrymple, R.A. (1994) : *Water Wave Mechanics for Engineers and Scientists*, *Advanced series on ocean engineering*, 2
- Divinsky, B.V., Levin, B.V, Lopatikin, L.I., Pelinovsky, E.N. dan Slyungaev, A.V. (2004) : *A Freak Wave in the Black Sea: Observations and Simulation*, *Doklady Earth Science*, 395, 438-443
- Earle, M.D. (1975) : *Extreme Wave Conditions During Hurricane Camille*, *J. Geophys. Res.*, 80, 377-379
- Kjeldsen, S.P. (1984) : *Dangerous Wave Group*, *Norwegian Maritime Research*, 12, 16
- Marwan (2006) *Gelombang Permukaan Satu dan Multi Arah Teori, Numerik dan Aplikasinya pada Pembangkit Gelombang Ekstrim*, Disertasi Dr, Fakultas MIPA ITB, Bandung
- Marwan (2010), *On the predicting extreme location and amplification of downstream propagation of bichromatic wave groups on hydrodynamic laboratory*, *Jurnal Dinamika Teknik Sipil*, vol. 10, no
- Marwan (2010), *On the maximal temporal amplitude of down stream running non linear water waves*, *Tamkang Journal of Mathematics*, vol. 14 No.1, 51-69
- Mori, N., Liu, P.C. dan Yasuda, T.(2002) : *Analysis of Freak Wave Measurements in the Sea of Japan*, *Ocean Engineering*, 29, 1399-1414

- Nayfeh, A.H (1993), Introduction to perturbation techniques., John Wiley and Sons, New York
- Newman, J.N. 1999 Marine Hydrodynamics, 9th Printing, USA, Maple-Vail, Inc
- Smith, R. (1976) : Giant Waves, J. Fluid Mech., 77, 417-431
- Trulsen, K. dan Dysthe, K. (1997) : Freak Waves a Three Dimensional Wave Simulation, Proc. of the 21st Symposium on Naval Hydrodynamics, E.P. Rood. Eds., National Academy Press, 550-558
- Whitham, G.B (1974), Linear and non-linear waves, John Wiley and Sons, New York.



BIODATA PENELITI
PUSAT PENELITIAN DAN PENERBITAN LP2M
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI AR-RANIRY BANDA ACEH

A. Identitas Diri

1.	Nama Lengkap <i>(dengan gelar)</i>	Budi Azhari, M.Pd
2.	Jenis Kelamin L/P	L
3.	Jabatan Fungsional	Lektor
4.	NIP	198003182008011005
5.	NIDN	2018038003
6.	NIPN <i>(ID Peneliti)</i>	201803800308552
7.	Tempat dan Tanggal Lahir	Seumadam, 18-03-1980
8.	E-mail	budiazhari@ar-raniry.ac.id
9.	Nomor Telepon/HP	+62 821-6168-8448
10.	Alamat Kantor	Jl. Syehk Abdur Rauf, Kopelma Darussalam, Banda Aceh
11.	Nomor Telepon/Faks	+62-651-7557321
12.	Bidang Ilmu	Matematika
13.	Program Studi	Pendidikan Matematika
14.	Fakultas	Fakultas Tarbiyah dan Keguruan

B. Riwayat Pendidikan

No.	Uraian	S1	S2	S3
1.	Nama Perguruan Tinggi	Universitas Syiah Kuala	Universitas Negeri Malang	-
2.	Kota dan Negara PT	Banda Aceh, Provinsi Aceh - Indonesia	Malang, Jawa Timur - Indonesia	-
3.	Bidang Ilmu/ Program Studi	Pendidikan Matematika	Pendidikan Matematika	-
4.	Tahun Lulus	2004	2006	-

C. Pengalaman Penelitian dalam 3 Tahun Terakhir

No.	Tahun	Judul Penelitian	Sumber Dana
1.	2016	Tinjauan terhadap Peningkatan Kualitas Guru, Kepala Sekolah dan Pengawas Sekolah di Aceh (Analisis Empiris dan Konseptual)	APBA/ Dinas Pendidikan Aceh

2.	2016	Identifikasi Gangguan Belajar Dyscalculia pada Anak Madrasah Ibtidayah Kota Banda Aceh	DIPA UIN Ar-Raniry
3.	2017	Model <i>Eliciting Activities</i> dalam menganalisis Kreativitas Pemecahan Masalah Matematis pada Mahasiswa Pendidikan Matematika di PTKIN Aceh	DIPA UIN Ar-Raniry
4.	2018	Pengembangan Perangkat Pembelajaran Bagi Anak Berkebutuhan Khusus Dyscalculia	DIPA UIN Ar-Raniry

D. Pengalaman Pengabdian Kepada Masyarakat dalam 3 Tahun Terakhir

No.	Tahun	Judul Pengabdian	Sumber Dana
1.	2016	Pendampingan penulisan karya tulis ilmiah bagi guru matematika di Kab. Pidie Jaya	Dinas Pendidikan Kabupaten Pidie Jaya
2.	2016	Pendampingan penulisan karya tulis ilmiah bagi guru matematika di Kab. Aceh Jaya	Dinas Pendidikan Kabupaten Aceh Jaya
3.	2017	Pendampingan terhadap guru matematika dalam menangani siswa dengan gangguan belajar diskalkulia di Madrasah Ibtidaiyah Kota Banda Aceh	Mandiri

E. Publikasi Artikel Ilmiah dalam Jurnal dalam 5 Tahun Terakhir

No.	Judul Artikel Ilmiah	Nama Jurnal	Volume/Nomor/Tahun/Url
1.	Pembelajaran dengan Pendekatan Teori APOS untuk Meningkatkan Pemahaman Mahasiswa pada Mata Kuliah Kalkulus	Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika. (Cetak)	Vol. 3. No. 1. Thn 2015
2.	Peningkatan Kemampuan Pemecahan Masalah Matematika Melalui <i>Creative Problem Solving</i> pada Mahasiswa Pendidikan Matematika Fakultas	Al-Khwarizmi: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika. (Cetak)	Vol. 3. No. 1. Thn 2016.

	Tarbiyah dan Keguruan UIN Ar-Raniry Banda Aceh		
3.	Identifikasi Gangguan Belajar Dyscalculia pada Siswa Madrasah Ibtidaiyah	Al-Khawarizmi: Jurnal Pendidikan dan Pembelajaran Matematika (Online)	Vol. 1. No. 1. Thn 2017.
4.	E-Learning as Connector among Education Institution in the 4th Industrial Revolution	Journal of Physics: Conference Series (Online)	Vol. 1471 No. 1 Thn 2018
5.	Innovation model of citizenship education learning in the 21st-century skill-learning environment of students in Aceh	Journal of Critical Review (Online)	Vol. 7, No. 16. Thn 2020
6.	Extended F-Expansion Method for Solving the modified Korteweg-de Vries (mKdV) Equation	Al-Jabar: Jurnal Pendidikan Matematika (Online)	Vol. 11, No. 1. Thn 2020

F. Karya Buku dalam 5 Tahun Terakhir

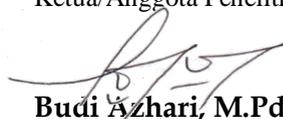
No.	Judul Buku	Tahun	Tebal Halaman	Penerbit
1.	Sejarah dan Filsafat Matematika	2017	viii + 234	Pale Media Prima – Yogyakarta. ISBN: 978-602-60760-4-5
2.				

G. Perolehan HKI dalam 10 Tahun Terakhir

No.	Judul/Tema HKI	Tahun	Jenis	Nomor P/ID
1.				
2.				
dst.				

Demikian biodata ini saya buat dengan sebenarnya.

Banda Aceh, 23 Oktober 2020
Ketua/Anggota Peneliti,



Budi Azhari, M.Pd
NIDN. 2018038003