No. Reg: 191140000020295

LAPORAN PENELITIAN

PENYELESAIAN EKSAK PERSAMAAN GELOMBANG *m*KdV MENGGUNAKAN METODE *EXTENDED F-EXPANSION*

Ketua Peneliti
Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN: 2017049301
ID Peneliti: 201704930108001

Kategori Penelitian	**Penelitian Pembinaan/Peningkatan Kapasitas**
Bidang Ilmu Kajian	**Sains dan Teknologi**
Sumber Dana	**DIPA UIN Ar-Raniry Tahun 2019**

PUSAT PENELITIAN DAN PENERBITAN
LEMBAGA PENELITIAN DAN PENGABDIAN KEPADA MASYARAKAT
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI AR-RANIRY BANDA ACEH
OKTOBER 2019

LEMBARAN IDENTITAS DAN PENGESAHAN LAPORAN PENELITIAN
PUSAT PENELITIAN DAN PENERBITAN LP2M UIN AR-RANIRY
TAHUN 2019

1.	a.	Judul Penelitian	:	**Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion***
	b.	Kategori Penelitian	:	Pembinaan/Peningkatan Kapasitas
	c.	No. Registrasi	:	191140000020295
	d.	Bidang Ilmu yang diteliti	:	Sains dan Teknologi
2.	Peneliti/Ketua Peneliti			
	a.	Nama Lengkap	:	Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
	b.	Jenis Kelamin	:	Perempuan
	c.	NIP *(Kosongkan bagi Non PNS)*	:	199304172018012002
	d.	NIDN	:	2017049301
	e.	NIPN (ID Peneliti)	:	201704930108001
	f.	Pangkat/Gol.	:	Penata Muda Tk. I/IIIb
	g.	Jabatan Fungsional	:	Asisten Ahli
	h.	Fakultas/Prodi	:	Tarbiyah dan Keguruan/Pendidikan Matematika
	i.	Anggota Peneliti		
		Nama Lengkap	:	-
		Jenis Kelamin	:	-
		Fakultas/Prodi	:	-
3.	Lokasi Penelitian		:	Perpustakaan USU Medan dan Prodi Pendidikan Matematika UIN Ar-Raniry Banda Aceh
4.	Jangka Waktu Penelitian		:	6 (enam) Bulan
5.	Th Pelaksanaan Penelitian		:	2019
6.	Jumlah Biaya Penelitian		:	Rp. 15.000.000,- (*Lima Belas Juta Rupiah*)
7.	Sumber Dana		:	DIPA UIN Ar-Raniry Banda Aceh Tahun 2019
8.	*Output* dan *Outcome* Penelitian		:	a. Laporan Penelitian; b. Publikasi Ilmiah; c. HKI

Mengetahui,
Kepala Pusat Penelitian dan Penerbitan
LP2M UIN Ar-Raniry Banda Aceh,

Dr. Muhammad Maulana, M. Ag.
NIP. 197204261997031002

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301

Menyetujui:
Rektor UIN Ar-Raniry Banda Aceh,

Prof. Dr. H. Warul Walidin AK., MA.
NIP. 195811121985031007

PERNYATAAN

Saya yang bertanda tangan di bawah Ini:

Nama	:	**Vina Apriliani, S.Si., M.Si.**
NIDN	:	2017049301
Jenis Kelamin	:	Perempuan
Tempat / Tgl. Lahir	:	Kuningan / 17 April 1993
Alamat	:	Kompleks Perumahan FMIPA, No. 32, Desa Lambitra, Kec. Darussalam, Kab. Aceh Besar, Provinsi Aceh
Fakultas / Prodi	:	Tarbiyah dan Keguruan / Pendidikan Matematika

Dengan ini menyatakan dengan sesungguhnya bahwa penelitian yang berjudul: **"Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion*"** adalah benar-benar Karya asli saya yang dihasilkan melalui kegiatan yang memenuhi kaidah dan metode ilmiah secara sistematis sesuai otonomi keilmuan dan budaya akademik serta diperoleh dari pelaksanaan penelitian yang dibiayai sepenuhnya dari DIPA UIN Ar-Raniry Banda Aceh Tahun Anggaran 2019. Apabila terdapat kesalahan dan kekeliruan di dalamnya, sepenuhnya menjadi tanggung jawab saya.

Demikian surat pernyataan ini saya buat dengan sesungguhnya.

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Saya yang membuat pernyataan,
Ketua Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301

PENYELESAIAN EKSAK PERSAMAAN GELOMBANG *m*KdV MENGGUNAKAN METODE *EXTENDED F-EXPANSION*

Ketua Peneliti:
Vina Apriliani, S.Si., M.Si.

Abstrak

Salah satu fenomena dalam ilmu kelautan yang sering ditemui adalah fenomena gelombang air. Gelombang yang terjadi di bawah permukaan air laut disebut dengan gelombang internal. Salah satu model matematika yang dapat merepresentasikan gelombang internal soliter adalah persamaan Korteweg-de Vries (KdV). Kemudian, persamaan KdV ini dimodifikasi suku-suku gangguan (pertubatif) sehingga diperoleh persamaan gelombang *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV). Banyak metode yang dapat digunakan untuk mengonstruksi penyelesaian persamaan gelombang *m*KdV, salah satunya adalah metode *Extended F-Expansion*. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengetahui penyelesaian eksak dari persamaan gelombang *m*KdV menggunakan metode *Extended F-Expansion* dan mengetahui grafik penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV yang diselesaikan menggunakan metode *Extended F-Expansion* tersebut. Hasil penyelesaian persamaan gelombang *m*KdV berupa penyelesaian eksak yang dinyatakan dalam fungsi Jacobi eliptik, fungsi trigonometri, dan fungsi hiperbolik. Beberapa grafik penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV tersebut diilustrasikan menggunakan *software Maple*.

Kata Kunci: Gelombang Internal Soliter; Persamaan Gelombang *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV); Metode *Extended F-Expansion*

KATA PENGANTAR

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

Syukur Alhamdulillah kepada Allah SWT dan salawat beriring salam penulis persembahkan kepangkuan alam Nabi Muhammad SAW, karena dengan rahmat dan hidayah-Nya penulis telah dapat menyelesaikan laporan penelitian dengan judul **"Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion*".**

Dalam proses penelitian dan penulisan laporan ini tentu banyak pihak yang ikut memberikan motivasi, bimbingan dan arahan. Oleh karena itu penulis tidak lupa menyampaikan ucapan terima kasih kepada yang terhormat:

1. Bapak Rektor Universitas Islam Negeri Ar-Raniry Banda Aceh;
2. Ibu Ketua LP2M UIN Ar-Raniry Banda Aceh;
3. Bapak Kepala Pusat Penelitian dan Penerbitan UIN Ar-Raniry Banda Aceh;

Akhirnya hanya Allah SWT yang dapat membalas amalan mereka, semoga menjadikannya sebagai amal yang baik. Harapan penulis, semoga hasil penelitian ini bermanfaat dan menjadi salah satu amalan penulis yang diperhitungkan sebagai ilmu yang bermanfaat di dunia dan akhirat. *Amin ya Rabbal 'Alamin.*

Banda Aceh, 28 Oktober 2019

Ketua Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.

DAFTAR ISI

DAFTAR TABEL

DAFTAR GAMBAR

DAFTAR LAMPIRAN

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Salah satu fenomena dalam ilmu kelautan yang sering ditemui adalah fenomena gelombang air. Gelombang air ini ada yang terjadi di permukaan air laut dan ada pula yang terjadi di bawah permukaan air laut. Gelombang yang terjadi di bawah permukaan air laut disebut dengan gelombang internal. Salah satu gelombang internal yang sering diamati adalah gelombang soliter yang hanya memiliki satu puncak dan merambat dengan mempertahankan bentuk dan kecepatannya serta tidak ada aliran balik. Gerakan gelombang soliter ini dapat dimodelkan dalam suatu persamaan matematika untuk memperoleh pendekatan model terkait bentuk dan proses perambatannya menuju pantai.

Salah satu model matematika yang dapat merepresentasikan gelombang internal soliter adalah persamaan Korteweg-de Vries (KdV). Persamaan KdV ini diturunkan dari persamaan dasar fluida ideal yaitu fluida yang takmampat (*incompressible*) dan takkental (*inviscid*). Kemudian, persamaan KdV ini dimodifikasi suku-suku gangguan (pertubatif) sehingga diperoleh persamaan gelombang *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV). Persamaan gelombang *m*KdV dapat diselesaikan menggunakan metode analitik (eksak) maupun metode numerik (pendekatan).

Banyak metode yang telah digunakan para peneliti untuk mengonstruksi penyelesaian persamaan gelombang *m*KdV. Beberapa diantaranya adalah metode *F-Expansion* yang digunakan oleh Bashir dan Alhakim (2013) dan metode *Exp-Function* oleh Chai et al. (2014) dengan hasil berupa penyelesaian eksak. Selain itu, ada pula peneliti yang menggunakan metode numerik seperti Abassy et al. (2004) dengan metode *Adomian Pade Approximation*.

Metode *extended F-expansion* merupakan pengembangan dari Metode *F-expansion* dengan memberikan tambahan variabel pada pemisalan penyelesaiannya. Metode ini dapat digunakan untuk menyelesaikan masalah persamaan diferensial taklinear dengan cara yang sederhana dan menghasilkan penyelesaian yang eksak. Al-Fhaid (2012) telah menggunakan metode ini untuk menyelesaikan persamaan *modified* KdV-KP. Kemudian persamaan Kudryashov-Sinelshchikov telah diselesaikan oleh Zhao (2013) dan persamaan gelombang orde tinggi bertipe KdV juga telah diselesaikan oleh He et al. (2013) menggunakan metode *extended F-expansion*. Selain itu, peneliti juga pernah menggunakan metode ini untuk menyelesaikan persamaan Boussinesq Orde Empat (Apriliani, 2015).

Sehubungan dengan uraian di atas, maka penelitian yang berkaitan dengan penyelesaian persamaan gelombang sangatlah penting untuk dikaji saat ini. Ketika penyelesaian tersebut ada, maka dapat membantu untuk memahami proses dinamik dari persamaan gelombang yang dimodelkan tersebut. Oleh karena itu, peneliti tertarik untuk meneliti tentang "**Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion***".

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang di atas, maka dalam penelitian ini yang menjadi rumusan masalah adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana cara menentukan penyelesaian eksak dari persamaan gelombang *m*KdV menggunakan metode *extended F-expansion*?
2. Seperti apa grafik penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV yang diselesaikan menggunakan metode *extended F-expansion*?

C. Tujuan Penelitian

Sesuai dengan permasalahan di atas, maka tujuan yang akan dicapai dalam penelitian ini adalah sebagai berikut:

1. Mengetahui penyelesaian eksak dari persamaan gelombang *m*KdV menggunakan metode *extended F-expansion*.
2. Mengetahui grafik penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV yang diselesaikan menggunakan metode *extended F-expansion*.

D. Manfaat Penelitian

Hasil dari pelaksanaan penelitian ini diharapkan dapat memberikan manfaat, antara lain:

1. Manfaat Teoritis

   Penelitian ini diharapkan dapat bermanfaat dalam menambah pengetahuan terutama hal-hal yang berkaitan dengan persamaan gelombang *m*KdV dan penggunaan metode *extended F-expansion*.

2. Manfaat Praktis

Penelitian ini diharapkan dapat menambah wawasan dan pengetahuan mengenai implementasi metode-metode penyelesaian eksak persamaan gelombang yang inovatif. Bagi peneliti selanjutnya, hasil penelitian ini dapat dijadikan sebagai salah satu sumber informasi dan bahan rujukan untuk mengadakan penelitian yang lebih lanjut.

BAB II
KAJIAN KEPUSTAKAAN

A. Persamaan Diferensial

Leibniz memperkenalkan persamaan diferensial pada tahun 1676. Persamaan diferensial merupakan persamaan yang menghubungkan turunan dari fungsi yang tidak diketahui, fungsi itu sendiri, variabel sehingga fungsi terdefinisi, dan konstanta (Farlow, 1994). Persamaan diferensial dibagi menjadi dua, yaitu:

1. Persamaan Diferensial Biasa

Persamaan diferensial biasa (PDB) adalah persamaan diferensial dengan fungsi yang tidak diketahui hanya bergantung pada satu variabel bebas. Variabel y biasa digunakan sebagai variabel takbebas, sedangkan variabel x atau t biasa digunakan sebagai variabel bebas. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa adalah sebagai berikut:

$$F\left(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}\right) = 0. \tag{2.1}$$

Persamaan (2.1) dapat dibedakan menjadi dua berdasarkan kelinearannya, yaitu persamaan diferensial biasa linear dan taklinear. Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linear adalah sebagai berikut:

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = f(x). \tag{2.2}$$

Persamaan diferensial biasa yang tidak dapat dituliskan dalam bentuk persamaan (2.2) disebut persamaan diferensial biasa taklinear (Farlow, 1994).

Contoh PDB taklinear:

$$\frac{dy}{dx} + y = y^2 \qquad \text{(Persamaan Bernoulli)}$$

2. Persamaan Diferensial Parsial

Persamaan diferensial parsial (PDP) adalah persamaan diferensial yang memuat turunan parsial dan bergantung pada lebih dari satu variabel bebas (Farlow, 1994).

Contoh PDP linear:

$$u_t = u_{xx} \qquad \text{(Persamaan Panas)}$$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad \text{(Persamaan Laplace)}$$

B. Penyelesaian Persamaan Diferensial

Penyelesaian dari persamaan diferensial orde-n adalah fungsi $y = y(x)$ yang jika disubstitusikan ke persamaan tersebut akan memenuhi sepanjang interval $a < x < b$ (Farlow, 1994).

Contoh Penyelesaian Persamaan Diferensial:

Fungsi $y(x) = \sin x - \cos x + 1$ adalah penyelesaian dari persamaan diferensial biasa linear $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 1$.

C. Persamaan *modified* Korteweg-de Vries (mKdV)

Persamaan *modified* Korteweg-de Vries (mKdV) adalah pengembangan dari persamaan gelombang Korteweg-de Vries (KdV) yang telah dimodifikasi suku-suku pertubatif atau suku gangguannya. Persamaan mKdV merepresentasikan model dinamika gelombang soliter internal $u(x,t)$ yang menunjukkan pergerakan gelombang di posisi x pada waktu t. Model persamaan mKdV pada penelitian ini mengacu pada Chai et al. (2014) sebagai berikut:

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0$$

$$u(x,0) = u_0(x) \in \mathbb{R}$$

$$\{-L \leq x \leq L\} \text{ dan } t \geq 0$$

dengan syarat batas:

$$u(-L,t) = 0, u(L,t) = 0, \text{ dan } u_x(L,t) = 0.$$

Keterangan:

$u(x,0)$: penyelesaian fungsi pada waktu $t = 0$

u_t : turunan pertama terhadap fungsi t

u_x : turunan pertama terhadap fungsi x

u_{xxx} : turunan ketiga terhadap fungsi x

x : posisi gelombang

L : panjang selang x

t : lama waktu

D. Metode *Extended F-Expansion*

Prosedur utama dari metode *extended F-expansion* dijelaskan dalam langkah-langkah berikut (He et al., 2013).

Langkah 1

Tinjau secara umum persamaan diferensial parsial taklinear

$$F(u, u_x, u_t, u_{xx}, u_{xt}, \dots) = 0. \tag{2.3}$$

Dengan menggunakan $u(x,t) = U(\xi),\ \xi = x - ct,$ persamaan (2.3) dapat dituliskan menjadi persamaan diferensial biasa taklinear

$$F(U, U', U'', \dots) = 0, \tag{2.4}$$

dengan turunan pertama menunjukkan turunan terhadap ξ.

Langkah 2

Misalkan penyelesaian persamaan (2.4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$U(\xi) = A_0 + \sum_{i=1}^{n} \left(A_i F^i(\xi) + B_i F^{-i}(\xi)\right), \tag{2.5}$$

dengan $A_i, B_i\ (i = 1,2, \dots n)$ adalah konstanta yang ditentukan kemudian, n adalah bilangan bulat positif yang didapat dari prinsip keseimbangan homogen, dan $F(\xi)$ memenuhi persamaan berikut:

$$\left(F'(\xi)\right)^2 = h_0 + h_1 F(\xi) + h_2 F^2(\xi) + h_3 F^3(\xi) + h_4 F^4(\xi), \tag{2.6}$$

dengan h_0, h_1, h_2, h_3, dan h_4 adalah konstanta.

Selanjutnya, kedua ruas persamaan (2.6) diturunkan terhadap ξ satu kali sehingga diperoleh

$$F''(\xi) = \frac{1}{2} h_1 + h_2 F(\xi) + \frac{3}{2} h_3 F^2(\xi) + 2h_4 F^3(\xi). \tag{2.7}$$

Langkah 3

Substitusikan persamaan (2.5), (2.6), dan (2.7) ke dalam persamaan (2.4) dan atur semua koefisien dari $F^j(\xi)\ (j = 0,1,2, \dots)$ dari persamaan yang dihasilkan menjadi nol sehingga menghasilkan sistem persamaan aljabar taklinear untuk A_0, A_i, dan $B_i\ (i = 1,2, \dots, n)$.

Langkah 4

Asumsikan bahwa konstanta A_0, A_i, dan $B_i\ (i = 1,2, \dots, n)$ dapat diperoleh dengan menyelesaikan persamaan aljabar pada langkah 3 kemudian substitusikan konstanta tersebut ke persamaan (2.5) sehingga dihasilkan penyelesaian eksplisit dari persamaan (2.3) yang bergantung pada kondisi khusus yang dipilih untuk h_0, h_1, h_2, h_3, dan h_4.

E. Penelitian Relevan

Penelitian yang relevan dengan penelitian ini adalah penelitian yang dilakukan oleh Bashir dan Alhakim (2013) yang berjudul "*New F Expansion Method and Its Applications to Modified KdV Equation*". Bashir dan Alhakim menyelesaikan persamaan *m*KdV menggunakan metode *F Expansion* sehingga diperoleh penyelesaian eksak yang dinyatakan dalam fungsi Jacobi eliptik dan fungsi hiperbolik. Hasil penyelesaian eksak tersebut diilustrasikan menggunakan *sotware* Maple.

BAB III
METODE PENELITIAN

A. Data Penelitian

Data yang digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa persamaan *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV).

B. Tahapan-Tahapan Penelitian

Bagan tahapan-tahapan penelitian yang akan dilakukan dapat dilihat pada Gambar 3.1.

Gambar 3.1. Bagan Tahapan-Tahapan Penelitian

Penjelasan dari Gambar 3.1. adalah sebagai berikut:

1. Studi Literatur

   Tahap awal yang dilakukan pada penelitian ini adalah mengumpulkan berbagai macam literatur dari artikel/jurnal ilmiah, skripsi, tesis, maupun buku-buku tentang metode *extended F-expansion*, persamaan gelombang *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV), atau data apapun yang mendukung penelitian ini.

2. Transformasi PDP Menjadi PDB

   Setelah memperoleh berbagai informasi dari literatur, maka tahap selanjutnya adalah mentransformasi persamaan gelombang *m*KdV. Persamaan gelombang *m*KdV yang awalnya adalah persamaan diferensial parsial (PDP) taklinear ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa (PDB) taklinear.

3. Penerapan Metode *Extended F-Expansion*

   Metode *extended F-expansion* diterapkan pada persamaan gelombang *m*KdV yang telah ditransformasi menjadi PDB taklinear. Penyelesaian eksak dari persamaan gelombang *m*KdV ini dimisalkan dalam bentuk fungsi F.

4. Penentuan Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV

   Penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV dapat ditentukan dengan mengubah fungsi F menjadi fungsi Jacobi eliptik. Fungsi Jacobi eliptik ini kemudian didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik.

5. Pembuatan Grafik Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV

   Setelah diperoleh penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV, maka tahap selanjutnya adalah menggambar grafik penyelesaian eksak tersebut. Grafik penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV digambar menggunakan *software Maple*.

6. Kesimpulan

   Penarikan kesimpulan bermanfaat untuk memberikan penjelasan dan penekanan kembali secara global mengenai cara menentukan penyelesaian eksak beserta grafik penyelesaian persamaan *m*KdV.

BAB IV
HASIL PENELITIAN DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, metode *extended F-expansion* digunakan untuk menentukan penyelesaian eksak dari persamaan mKdV

$$u_t + u^2 u_x + u_{xxx} = 0. \tag{4.1}$$

Persamaan (4.1) merupakan persamaan diferensial parsial taklinear. Berdasarkan langkah 1 pada metode *extended F-expansion*, persamaan (4.1) perlu ditransformasi menjadi persamaan diferensial biasa taklinear. Transformasi yang digunakan adalah $u(x,t) = U(\xi)$, $\xi = x - ct$. Kemudian ditentukan turunan-turunan parsial dari u yang ada di persamaan (4.1), yaitu:

$$\begin{aligned} u_x &= U' & \qquad u_t &= -cU' \\ u_{xx} &= U'' & \qquad u^2 &= U^2. \\ u_{xxx} &= U''' \end{aligned} \tag{4.2}$$

Persamaan (4.2) disubstitusikan ke persamaan (4.1) sehingga didapat

$$-cU' + U^2U' + U''' = 0. \tag{4.3}$$

Persamaan (4.3) diintegralkan terhadap ξ satu kali menjadi

$$\int [-cU' + U^2U' + U'''] \, d\xi = \int 0 \, d\xi \rightarrow -cU + \frac{1}{3}U^3 + U'' + k_1 = k_2.$$

Kemudian atur semua konstanta pengintegralan sama dengan nol ($k_1 = k_2 = 0$) dan kali kedua ruas dengan 3 sehingga persamaan (4.1) telah menjadi persamaan diferensial biasa taklinear, yaitu:

$$-3cU + U^3 + 3U'' = 0. \tag{4.4}$$

Keseimbangan antara U^3 dan U'' pada persamaan (4.4) menghasilkan persamaan $3n = n + 2$ sehingga diperoleh $n = 1$. Berdasarkan langkah 2 pada metode *extended F-expansion*, maka penyelesaian persamaan (4.4) memiliki bentuk

$$u(x,t) = U(\xi) = A_0 + A_1 F(\xi) + \frac{B_1}{F(\xi)} \tag{4.5}$$

dengan A_0, A_1, dan B_1 adalah konstanta yang akan ditentukan dan $F(\xi)$ memenuhi persamaan (2.6) dan (2.7).

Selanjutnya, penentuan $U^3(\xi)$ dari persamaan (4.5), yaitu:

$$U^3(\xi) = \left[A_0 + A_1 F(\xi) + \frac{B_1}{F(\xi)}\right]^3$$

$$U^3(\xi) = {A_0}^3 + 6A_0A_1B_1 + \frac{{B_1}^3}{F^3(\xi)} + \frac{3A_0{B_1}^2}{F^2(\xi)} + \frac{3{A_0}^2B_1 + 3A_1{B_1}^2}{F(\xi)}$$
$$+\left[3{A_0}^2A_1 + 3{A_1}^2B_1\right]F(\xi) + 3A_0{A_1}^2F^2(\xi) + {A_1}^3F^3(\xi). \tag{4.6}$$

Kemudian persamaan (4.5) diturunkan dua kali menjadi

$$U'(\xi) = A_1F'(\xi) - \frac{B_1F'(\xi)}{F^2(\xi)}$$

$$U''(\xi) = A_1F''(\xi) + \frac{2B_1\left(F'(\xi)\right)^2}{F^3(\xi)} - \frac{B_1F''(\xi)}{F^2(\xi)}. \tag{4.7}$$

Berdasarkan langkah 3 pada metode *extended F-expansion*, persamaan (4.5), (4.6), dan (4.7) disubstitusi ke persamaan (4.4) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &{A_0}^3 + 6A_0A_1B_1 - 3cA_0 + \frac{{B_1}^3}{F^3(\xi)} + \frac{3A_0{B_1}^2}{F^2(\xi)} \\ &+ \frac{3{A_0}^2B_1 + 3A_1{B_1}^2 - 3cB_1}{F(\xi)} + \left[3{A_0}^2A_1 + 3{A_1}^2B_1 - 3cA_1\right]F(\xi) \\ &+ 3A_0{A_1}^2F^2(\xi) + {A_1}^3F^3(\xi) + 3A_1F''(\xi) + \frac{6B_1\left(F'(\xi)\right)^2}{F^3(\xi)} \\ &- \frac{3B_1F''(\xi)}{F^2(\xi)} = 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Kemudian persamaan (2.6) dan (2.7) juga disubstitusi ke persamaan (4.8) sehingga diperoleh

$$\begin{aligned} &{A_0}^3 + 6A_0A_1B_1 - 3cA_0 + \frac{3A_1h_1}{2} + \frac{3B_1h_3}{2} + \frac{{B_1}^3 + 6B_1h_0}{F^3(\xi)} \\ &+ \frac{3A_0{B_1}^2 + \frac{9}{2}B_1h_1}{F^2(\xi)} + \frac{3{A_0}^2B_1 + 3A_1{B_1}^2 - 3cB_1 + 3B_1h_2}{F(\xi)} \\ &+ \left[3{A_0}^2A_1 + 3{A_1}^2B_1 - 3cA_1 + 3A_1h_2\right]F(\xi) \\ &+ \left[3A_0{A_1}^2 + \frac{9}{2}A_1h_3\right]F^2(\xi) + \left[{A_1}^3 + 6A_1h_4\right]F^3(\xi) = 0. \end{aligned} \tag{4.9}$$

Semua koefisien dari $F^j(\xi)$ $(j = -3, -2, \ldots, 2, 3)$ pada persamaan (4.9) diatur menjadi nol sehingga dihasilkan sistem persamaan aljabar taklinear berikut:

$$
\begin{aligned}
F^{-3} &: {B_1}^3 + 6B_1h_0 = 0,\\
F^{-2} &: 3A_0{B_1}^2 + \frac{9}{2}B_1h_1 = 0,\\
F^{-1} &: 3{A_0}^2B_1 + 3A_1{B_1}^2 - 3cB_1 + 3B_1h_2 = 0,\\
F^{0} &: {A_0}^3 + 6A_0A_1B_1 - 3cA_0 + \frac{3A_1h_1}{2} + \frac{3B_1h_3}{2} = 0,\\
F &: 3{A_0}^2A_1 + 3{A_1}^2B_1 - 3cA_1 + 3A_1h_2 = 0,\\
F^{2} &: 3A_0{A_1}^2 + \frac{9}{2}A_1h_3 = 0,\\
F^{3} &: {A_1}^3 + 6A_1h_4 = 0.
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

Berdasarkan langkah 4 pada metode *extended F-expansion*, persamaan (4.10) kemudian diselesaikan menggunakan *software Maple* dengan asumsi saat $h_1 = h_3 = 0$ sehingga diperoleh nilai A_0, A_1, B_1, c sebagai penyelesaian persamaan (4.10) yaitu ditunjukkan pada Tabel 4.1. berikut.

Tabel 4.1. Nilai A_0, A_1, B_1, c sebagai Penyelesaian Persamaan (4.10)

Kasus	A_0	A_1	B_1	c
1	0	$\sqrt{-6h_4}$	0	h_2
2	0	$-\sqrt{-6h_4}$	0	h_2
3	0	0	$\sqrt{-6h_0}$	h_2
4	0	0	$-\sqrt{-6h_0}$	h_2

5	0	$\sqrt{-6h_4}$	$\sqrt{-6h_0}$	$h_2 - 6\sqrt{h_0h_4}$
6	0	$\sqrt{-6h_4}$	$-\sqrt{-6h_0}$	$h_2 + 6\sqrt{h_0h_4}$
7	0	$-\sqrt{-6h_4}$	$\sqrt{-6h_0}$	$h_2 + 6\sqrt{h_0h_4}$
8	0	$-\sqrt{-6h_4}$	$-\sqrt{-6h_0}$	$h_2 - 6\sqrt{h_0h_4}$

Sumber: Pengolahan Data

Nilai A_0, A_1, B_1, dan c pada Tabel 4.1. berturut-turut disubstitusi ke persamaan (4.5) sehingga diperoleh bentuk umum penyelesaian persamaan (4.4) sebagai berikut:

Tabel 4.2. Bentuk Umum Penyelesaian Persamaan (4.4)

Kasus	Bentuk Umum Penyelesaian Persamaan (4.4)
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6h_4}\,F(\xi)$ dengan $\xi = x - h_2t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6h_4}\,F(\xi)$ dengan $\xi = x - h_2t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$ dengan $\xi = x - h_2t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$ dengan $\xi = x - h_2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6h_4}\,F(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$ dengan $\xi = x - \left(h_2 - 6\sqrt{h_0h_4}\right)t$

6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6h_4}\,F(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$ dengan $\xi = x + \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6h_4}\,F(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$ dengan $\xi = x + \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6h_4}\,F(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6h_0}}{F(\xi)}$ dengan $\xi = x - \left(h_2 - 6\sqrt{h_0 h_4}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Asumsi saat $h_1 = h_3 = 0$, maka persamaan (2.6) menjadi

$$\left(F'(\xi)\right)^2 = h_0 + h_2 F^2(\xi) + h_4 F^4(\xi). \tag{4.11}$$

Penyelesaian persamaan (4.11) diberikan pada Tabel 4.3. Banyak penyelesaian eksak dari persamaan (4.1) dapat diperoleh dengan mensubstitusikan nilai h_0, h_2, h_4 dan fungsi $F(\xi)$ yang ada pada Tabel 4.3 ke bentuk umum penyelesaian pada Tabel 4.2.

Tabel 4.3. Penyelesaian Fungsi $F(\xi)$ dari Persamaan (4.11)

Kasus	h_0	h_2	h_4	$F(\xi)$
1	1	$-(1+m^2)$	m^2	$\mathrm{sn}\xi$
2	1	$-(1+m^2)$	m^2	$\mathrm{cd}\xi$
3	$1-m^2$	$2m^2-1$	$-m^2$	$\mathrm{cn}\xi$
4	m^2-1	$2-m^2$	-1	$\mathrm{dn}\xi$

5	m^2	$-(1+m^2)$	1	nsξ
6	m^2	$-(1+m^2)$	1	dcξ
7	$-m^2$	$2m^2-1$	$1-m^2$	ncξ
8	-1	$2-m^2$	m^2-1	ndξ
9	1	$2-m^2$	$1-m^2$	scξ
10	1	$2m^2-1$	$-m^2(1-m^2)$	sdξ
11	$1-m^2$	$2-m^2$	1	csξ
12	$-m^2(1-m^2)$	$2m^2-1$	1	dsξ

Sumber: Zhao, Y. (2013)

Tabel 4.4. Fungsi Jacobi Eliptik Berdegenerasi menjadi Fungsi Hiperbolik ketika $m \to 1$

$\mathrm{sn}(\xi) \to \tanh(\xi)$	$\mathrm{cn}(\xi) \to \mathrm{sech}(\xi)$	$\mathrm{dn}(\xi) \to \mathrm{sech}(\xi)$
$\mathrm{sd}(\xi) \to \sinh(\xi)$	$\mathrm{cd}(\xi) \to 1$	$\mathrm{ns}(\xi) \to \coth(\xi)$
$\mathrm{nd}(\xi) \to \cosh(\xi)$	$\mathrm{cs}(\xi) \to \mathrm{csch}(\xi)$	$\mathrm{ds}(\xi) \to \mathrm{csch}(\xi)$
$\mathrm{sc}(\xi) \to \sinh(\xi)$	$\mathrm{nc}(\xi) \to \cosh(\xi)$	$\mathrm{dc}(\xi) \to 1$

Sumber: Bashir, M.A. dan Alhakim, L.A. (2013)

Tabel 4.5. Fungsi Jacobi Eliptik Berdegenerasi menjadi Fungsi Trigonometri ketika $m \to 0$

$\mathrm{sn}(\xi) \to \sin(\xi)$	$\mathrm{cn}(\xi) \to \cos(\xi)$	$\mathrm{dn}(\xi) \to 1$	$\mathrm{sc}(\xi) \to \tan(\xi)$
$\mathrm{sd}(\xi) \to \sin(\xi)$	$\mathrm{cd}(\xi) \to \cos(\xi)$	$\mathrm{ns}(\xi) \to \csc(\xi)$	$\mathrm{nc}(\xi) \to \sec(\xi)$
$\mathrm{nd}(\xi) \to 1$	$\mathrm{cs}(\xi) \to \cot(\xi)$	$\mathrm{ds}(\xi) \to \csc(\xi)$	$\mathrm{dc}(\xi) \to \sec(\xi)$

Sumber: Bashir, M.A. dan Alhakim, L.A. (2013)

Masing-masing kasus pada Tabel 4.3. disubstitusikan ke bentuk umum penyelesaian yang ada pada Tabel 4.2. sehingga diperoleh penyelesaian eksak dari persamaan mKdV yaitu persamaan (4.1) dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik. Selain itu, fungsi Jacobi eliptik tersebut dapat berdegenerasi ketika $m \to 1$ menjadi fungsi hiperbolik seperti pada Tabel 4.4. dan berdegenerasi ketika $m \to 0$ menjadi fungsi trigonometri seperti pada Tabel 4.5.

Berikut penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 1.

Tabel 4.6. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 1

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi + \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$

6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi - \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi + \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{sn}\xi - \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sn}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.6. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.7. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 1

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\tanh(\xi)$ dengan $\xi = x + 2t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\tanh(\xi)$ dengan $\xi = x + 2t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$ dengan $\xi = x + 2t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$ dengan $\xi = x + 2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\tanh(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$

	dengan $\xi = x + 8t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\tanh(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$ dengan $\xi = x - 8t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\tanh(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$ dengan $\xi = x - 8t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\tanh(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\tanh(\xi)}$ dengan $\xi = x + 8t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.8. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 1

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.6., Tabel 4.7., dan Tabel 4.8., terdapat 8 penyelesaian dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, 8 penyelesaian dalam bentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian dalam bentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 2.

Tabel 4.9. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 2

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6m^2}\,\mathrm{cd}\xi$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{cd}\xi$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{cd}\xi}$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\mathrm{cd}\xi}$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6m^2}\,\mathrm{cd}\xi + \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{cd}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1 + m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$

6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6m^2}\,\mathrm{cd}\xi - \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{cd}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{cd}\xi + \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{cd}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6m^2}\,\mathrm{cd}\xi - \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{cd}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.9. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.10. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 2

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,3	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 2t$
2,4	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = 2\sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 8t$
6,7	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - 8t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -2\sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 8t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.11. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 2

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.9., Tabel 4.10., dan Tabel 4.11., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, tidak ada penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 3.

Tabel 4.12. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 3

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6m^2}\,\mathrm{cn}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6m^2}\,\mathrm{cn}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cn}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cn}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6m^2}\,\mathrm{cn}\xi + \dfrac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cn}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2 - 1) + 6\sqrt{(1-m^2)m^2}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6m^2}\,\mathrm{cn}\xi - \dfrac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cn}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2 - 1) + 6\sqrt{(1-m^2)m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6m^2}\,\mathrm{cn}\xi + \dfrac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cn}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2 - 1) + 6\sqrt{(1-m^2)m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6m^2}\,\mathrm{cn}\xi - \dfrac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cn}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2 - 1) + 6\sqrt{(1-m^2)m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.12. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.13. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 3

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.14. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 3

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$

3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6}}{\cos(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.12., Tabel 4.13., dan Tabel 4.14., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 4.

Tabel 4.15. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 4

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{dn}\xi$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{dn}\xi$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6(m^2-1)}}{\mathrm{dn}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6(m^2-1)}}{\mathrm{dn}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{dn}\xi + \frac{\sqrt{-6(m^2-1)}}{\mathrm{dn}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{(1-m^2)}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{dn}\xi - \frac{\sqrt{-6(m^2-1)}}{\mathrm{dn}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{(1-m^2)}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{dn}\xi + \frac{\sqrt{-6(m^2-1)}}{\mathrm{dn}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{(1-m^2)}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{dn}\xi - \frac{\sqrt{-6(m^2-1)}}{\mathrm{dn}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{(1-m^2)}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.15. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.16. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 4

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.17. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 4

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,3	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}$ dengan $\xi = x - 2t$
2,4	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}$ dengan $\xi = x - 2t$

5	$u(x,t) = U(\xi) = 2\sqrt{6}$ dengan $\xi = x + 4t$
6,7	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - 4t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -2\sqrt{6}$ dengan $\xi = x + 4t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.15., Tabel 4.16., dan Tabel 4.17., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan tidak ada penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 5.

Tabel 4.18. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 5

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{ns}\xi$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{ns}\xi$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$

3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\text{ns}\xi}$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6m^2}}{\text{ns}\xi}$ dengan $\xi = x + (1 + m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\text{ns}\xi + \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\text{ns}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1 + m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\text{ns}\xi - \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\text{ns}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1 + m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\text{ns}\xi + \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\text{ns}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1 + m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\text{ns}\xi - \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\text{ns}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1 + m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.18. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.19. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 5

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\coth(\xi)$ dengan $\xi = x + 2t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\coth(\xi)$ dengan $\xi = x + 2t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\coth(\xi)}$ dengan $\xi = x + 2t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\coth(\xi)}$ dengan $\xi = x + 2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\coth(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\coth(\xi)}$ dengan $\xi = x + 8t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\coth(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\coth(\xi)}$ dengan $\xi = x - 8t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\coth(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\coth(\xi)}$ dengan $\xi = x - 8t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\coth(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\coth(\xi)}$ dengan $\xi = x + 8t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.20. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 5

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.18., Tabel 4.19., dan Tabel 4.20., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 8 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 6.

Tabel 4.21. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 6

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{dc}\xi$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{dc}\xi$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\mathrm{dc}\xi}$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6m^2}}{\mathrm{dc}\xi}$ dengan $\xi = x + (1+m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{dc}\xi + \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\mathrm{dc}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{dc}\xi - \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\mathrm{dc}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{dc}\xi + \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\mathrm{dc}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{dc}\xi - \dfrac{\sqrt{-6m^2}}{\mathrm{dc}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((1+m^2) + 6\sqrt{m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.21. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.22. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 6

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,3	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 2t$
2,4	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = 2\sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 8t$
6,7	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - 8t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -2\sqrt{-6}$ dengan $\xi = x + 8t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.23. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 6

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.21., Tabel 4.22., dan Tabel 4.23., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, tidak ada penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 7.

Tabel 4.24. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 7

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(1-m^2)}\,\mathrm{nc}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(1-m^2)}\,\mathrm{nc}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$

3	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{6m^2}}{\text{nc}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{6m^2}}{\text{nc}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(1-m^2)}\,\text{nc}\xi + \frac{\sqrt{6m^2}}{\text{nc}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2 - 1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(1-m^2)}\,\text{nc}\xi - \frac{\sqrt{6m^2}}{\text{nc}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2 - 1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(1-m^2)}\,\text{nc}\xi + \frac{\sqrt{6m^2}}{\text{nc}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2 - 1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(1-m^2)}\,\text{nc}\xi - \frac{\sqrt{6m^2}}{\text{nc}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2 - 1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.24. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.25. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 7

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.26. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 7

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\sec(\xi)$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.24., Tabel 4.25., dan Tabel 4.26., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian dalam bentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 8.

Tabel 4.27. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 8

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(m^2-1)}\,\mathrm{nd}\xi$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(m^2-1)}\,\mathrm{nd}\xi$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$

3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{6}}{\mathrm{nd}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{6}}{\mathrm{nd}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(m^2-1)}\,\mathrm{nd}\xi + \dfrac{\sqrt{6}}{\mathrm{nd}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(m^2-1)}\,\mathrm{nd}\xi - \dfrac{\sqrt{6}}{\mathrm{nd}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(m^2-1)}\,\mathrm{nd}\xi + \dfrac{\sqrt{6}}{\mathrm{nd}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(m^2-1)}\,\mathrm{nd}\xi - \dfrac{\sqrt{6}}{\mathrm{nd}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.27. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.28. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 8

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{6}}{\cosh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.29. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 8

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,3	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}$ dengan $\xi = x - 2t$
2,4	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}$ dengan $\xi = x - 2t$

5	$u(x,t) = U(\xi) = 2\sqrt{6}$ dengan $\xi = x + 4t$
6,7	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - 4t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -2\sqrt{6}$ dengan $\xi = x + 4t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.27., Tabel 4.28., dan Tabel 4.29., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan tidak ada penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian sama dan ada penyelesaian berbentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 9.

Tabel 4.30. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 9

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(1-m^2)}\,\mathrm{sc}\xi$ dengan $\xi = x - (2-m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(1-m^2)}\,\mathrm{sc}\xi$ dengan $\xi = x - (2-m^2)t$

3	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sc}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6}}{\mathrm{sc}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(1 - m^2)}\,\mathrm{sc}\xi + \frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sc}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1 - m^2}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6(1 - m^2)}\,\mathrm{sc}\xi - \frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sc}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1 - m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(1 - m^2)}\,\mathrm{sc}\xi + \frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sc}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1 - m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6(1 - m^2)}\,\mathrm{sc}\xi - \frac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sc}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1 - m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.30. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.31. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 9

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = -\dfrac{\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.32. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 9

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\tan(\xi)$ dengan $\xi = x - 2t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\tan(\xi)$ dengan $\xi = x - 2t$

3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\tan(\xi)}$ dengan $\xi = x - 2t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\tan(\xi)}$ dengan $\xi = x - 2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\tan(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\tan(\xi)}$ dengan $\xi = x + 4t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\tan(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\tan(\xi)}$ dengan $\xi = x - 4t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\tan(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\tan(\xi)}$ dengan $\xi = x - 4t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\tan(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\tan(\xi)}$ dengan $\xi = x + 4t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.30., Tabel 4.31., dan Tabel 4.32., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 8 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian berbentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, hiperbolik, dan trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 10.

Tabel 4.33. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 10

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6m^2(1-m^2)}\,\mathrm{sd}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2-1)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6m^2(1-m^2)}\,\mathrm{sd}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2-1)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sd}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2-1)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\mathrm{sd}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2-1)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6m^2(1-m^2)}\,\mathrm{sd}\xi + \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sd}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2-1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6m^2(1-m^2)}\,\mathrm{sd}\xi - \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sd}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2-1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6m^2(1-m^2)}\,\mathrm{sd}\xi + \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sd}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2-1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6m^2(1-m^2)}\,\mathrm{sd}\xi - \dfrac{\sqrt{-6}}{\mathrm{sd}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2-1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.33. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.34. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 10

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sinh(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.35. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 10

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1,2	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
3,5	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
4,8	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\sin(\xi)}$ dengan $\xi = x - t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.33., Tabel 4.34., dan Tabel 4.35., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian berbentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 11.

Tabel 4.36. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 11

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{cs}\xi$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{cs}\xi$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cs}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \frac{-\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cs}\xi}$ dengan $\xi = x - (2 - m^2)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{cs}\xi + \frac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cs}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{cs}\xi - \frac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cs}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{cs}\xi + \frac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cs}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{cs}\xi - \frac{\sqrt{-6(1-m^2)}}{\mathrm{cs}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2 - m^2) - 6\sqrt{1-m^2}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.36. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.37. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 11

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\text{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\text{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\text{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\text{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.38. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 11

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\cot(\xi)$ dengan $\xi = x - 2t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\cot(\xi)$ dengan $\xi = x - 2t$

3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{-6}}{\cot(\xi)}$ dengan $\xi = x - 2t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{-6}}{\cot(\xi)}$ dengan $\xi = x - 2t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\cot(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\cot(\xi)}$ dengan $\xi = x + 4t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\cot(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\cot(\xi)}$ dengan $\xi = x - 4t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\cot(\xi) + \dfrac{\sqrt{-6}}{\cot(\xi)}$ dengan $\xi = x - 4t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\cot(\xi) - \dfrac{\sqrt{-6}}{\cot(\xi)}$ dengan $\xi = x + 4t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.36., Tabel 4.37., dan Tabel 4.38., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 8 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian berbentuk fungsi konstan.

Selanjutnya penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 12.

Tabel 4.39. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik untuk Tabel 4.3. Kasus 12

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Jacobi Eliptik
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{ds}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{ds}\xi$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{\sqrt{6m^2(1-m^2)}}{\mathrm{ds}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = \dfrac{-\sqrt{6m^2(1-m^2)}}{\mathrm{ds}\xi}$ dengan $\xi = x - (2m^2 - 1)t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{ds}\xi + \dfrac{\sqrt{6m^2(1-m^2)}}{\mathrm{ds}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2 - 1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{ds}\xi - \dfrac{\sqrt{6m^2(1-m^2)}}{\mathrm{ds}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2 - 1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$

7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{ds}\xi + \dfrac{\sqrt{6m^2(1-m^2)}}{\mathrm{ds}\xi}$ dengan $\xi = x + \left((2m^2-1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{ds}\xi - \dfrac{\sqrt{6m^2(1-m^2)}}{\mathrm{ds}\xi}$ dengan $\xi = x - \left((2m^2-1) - 6\sqrt{-m^2(1-m^2)}\right)t$

Sumber: Pengolahan Data

Penyelesaian eksak dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik pada Tabel 4.39. dapat didegenerasi menjadi fungsi hiperbolik ketika $m \to 1$ dan menjadi fungsi trigonometri ketika $m \to 0$.

Tabel 4.40. Penyelesaian Eksak Persamaan *m*KdV dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik untuk Tabel 4.3. Kasus 12

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Hiperbolik
1,5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
2,8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
3,4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x - t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\,\mathrm{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\,\mathrm{csch}(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Tabel 4.41. Penyelesaian Eksak Persamaan mKdV dalam Bentuk Fungsi Trigonometri untuk Tabel 4.3. Kasus 12

Kasus	Penyelesaian Eksak dalam Bentuk Fungsi Trigonometri
1	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
2	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
3	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
4	$u(x,t) = U(\xi) = 0$ dengan $\xi = x + t$
5	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x + t$
6	$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
7	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x - t$
8	$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{-6}\csc(\xi)$ dengan $\xi = x + t$

Sumber: Pengolahan Data

Berdasarkan Tabel 4.39., Tabel 4.40., dan Tabel 4.41., terdapat 8 penyelesaian berbentuk fungsi Jacobi eliptik, 4 penyelesaian berbentuk fungsi hiperbolik, dan 4 penyelesaian berbentuk fungsi trigonometri karena ada kasus yang menghasilkan penyelesaian yang sama dan ada penyelesaian berbentuk fungsi konstan.

Selanjutnya akan diilustrasikan beberapa grafik penyelesaian eksak persamaan mKdV yang telah diselesaikan menggunakan metode *extended F-expansion*. Untuk penyelesaian yang mengandung bilangan imajiner tidak dapat diplot grafiknya. Salah satu penyelesaian yang dapat diplot grafiknya yaitu penyelesaian pada Tabel 4.13 sebagai berikut:

$$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi) \text{ dengan } \xi = x - t \tag{4.12}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = \sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi) \text{ dengan } \xi = x + t \tag{4.13}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi) \text{ dengan } \xi = x - t \tag{4.14}$$

$$u(x,t) = U(\xi) = -\sqrt{6}\,\mathrm{sech}(\xi) \text{ dengan } \xi = x + t \tag{4.15}$$

Berikut langkah plot grafik 3D beserta hasilnya menggunakan *software Maple* untuk Persamaan (4.12), (4.13), (4.14), dan (4.15).

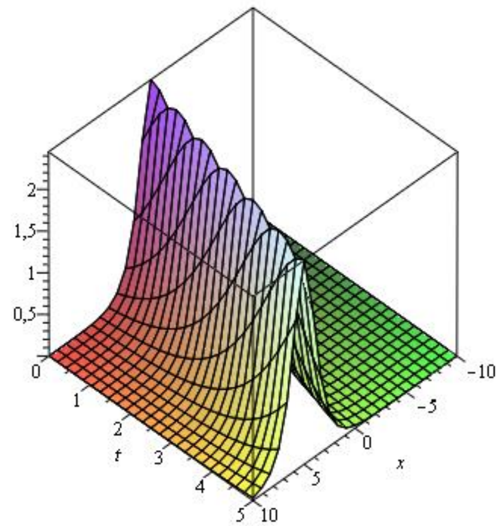
(1) Definisikan fungsi yang ingin diplot terlebih dahulu:

$$f(x,y) := \sqrt{6}\cdot\mathrm{sech}(x - t);$$

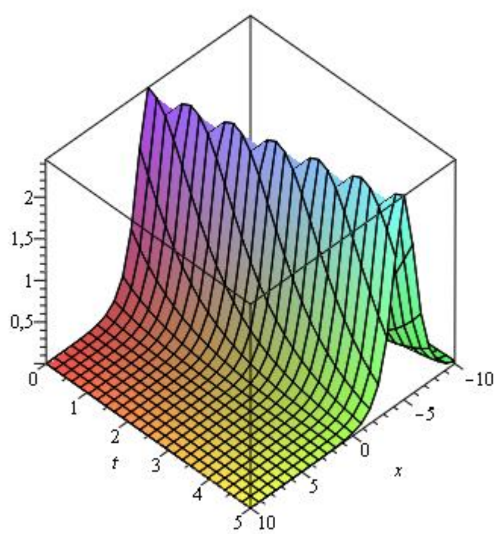
(2) Plot grafik 3D dengan memanggil fungsi dan batas sumbu:

$$plot3d\,(f(x,y), x = -10\,..10, t = 0\,..5, axes = boxed\,);$$

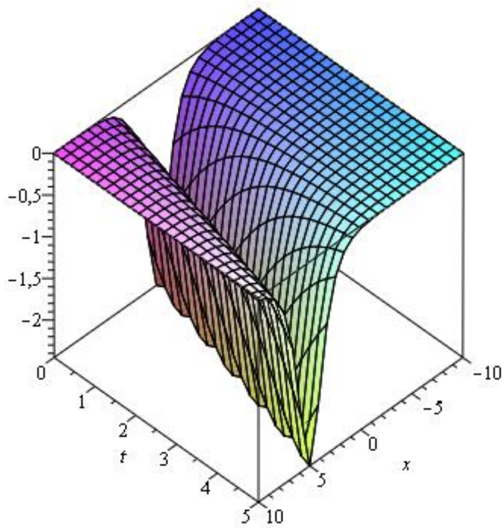
(3) Hasil Plot Grafik 3D



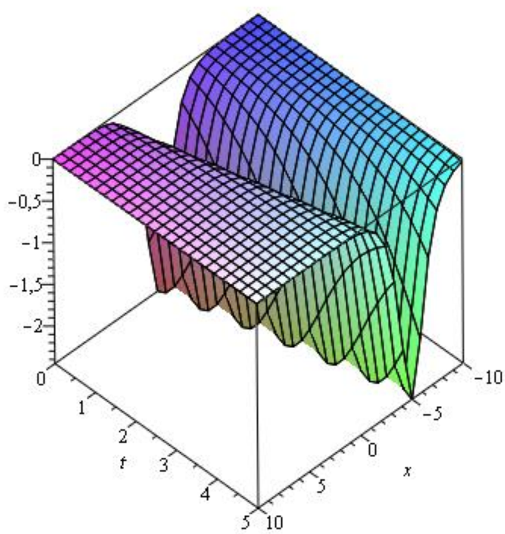
Gambar 4.1. Grafik Penyelesaian Eksak Persamaan (4.12)



Gambar 4.2. Grafik Penyelesaian Eksak Persamaan (4.13)



Gambar 4.3. Grafik Penyelesaian Eksak Persamaan (4.14)



Gambar 4.4. Grafik Penyelesaian Eksak Persamaan (4.15)

Gambar 4.1. sampai dengan Gambar 4.4. merupakan grafik penyelesaian eksak persamaan gelombang *m*KdV dalam bentuk fungsi hiperbolik, khususnya fungsi sech. Grafik gelombang yang terbentuk tersebut sesuai dengan sifat gelombang soliter yaitu memiliki satu puncak dan bergerak tanpa mengalami perubahan kecepatan dan bentuk.

BAB V
PENUTUP

A. Kesimpulan

Metode *extended F-expansion* merupakan salah satu metode yang sangat efektif dalam menentukan penyelesaian eksak berbagai persamaan diferensial taklinear. Dalam penelitian ini, persamaan *modified* Korteweg-de Vries (*m*KdV) telah berhasil diselesaikan menggunakan metode *extended F-expansion* dan beberapa penyelesaian eksaknya dinyatakan dalam bentuk fungsi Jacobi eliptik, fungsi hiperbolik, dan fungsi trigonometri. Kebenaran dari penyelesaian eksak ini telah diverifikasi dengan mensubstitusikan penyelesaian tersebut ke persamaan awal (*m*KdV). Selanjutnya diilustrasikan beberapa grafik dari penyelesaian eksak yang diperoleh menggunakan *software Maple*.

B. Saran

Dalam penelitian ini, metode *extended F-expansion* digunakan untuk menentukan penyelesaian eksak dari persamaan *m*KdV orde tiga. Perlu kajian lebih lanjut untuk menerapkan metode *extended F-expansion* ini dalam menentukan penyelesaian persamaan *m*KdV dengan orde yang lebih tinggi.

DAFTAR KEPUSTAKAAN

Abassy, T.A., El-Tawil, M.A., Saleh, H.K. (2004). The solution of KdV and *m*KdV equations using Adomian Pade approximation. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 5(4), 327-339.

Al-Fhaid, A.S. (2012). New exact solutions for the modified KdV-KP equation using the extended F-expansion method. *Applied Mathematical Sciences*, 6(107), 5315-5332.

Apriliani, V. (2015). Modifikasi Metode Ekspansi-*F* untuk Menyelesaikan Persamaan Boussinesq Orde Empat. *Skripsi*. Bogor: Institut Pertanian Bogor.

Bashir, M.A., Alhakim, L.A. (2013). New F expansion method and its applications to modified KdV equation. *Journal of Mathematics Research*, 5(4), 83-96. Doi:10.5539/jmr.v5n4p83

Chai, Y., Jia, T., Hao, H., Zhang, J. (2013). Exp-function method for a generalized *m*KdV equation. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2014, 1-8. Doi:10.1155/2014/ 153974

Farlow, S.J. (1994). *An Introduction to Differential Equations and Their Applications*. Singapore: McGraw-Hill, Inc.

He, Y., Zhao, Y., Long, Y. (2013). New exact solutions for a higher-order wave equation of KdV type using extended F-expansion method. *Mathematical Problems in Engineering*, 2013, 1-8. Doi:10.1155/2013/128970

Zhao, Y. (2013). F-expansion method and its application for finding new exact solutions to the Kudryashov-Sinelshchikov equation. *Journal of Applied Mathematics*, 2013, 1-7. Doi:10.1155/2013/895760

Lampiran 1

RINCIAN BIAYA PENELITIAN

Judul Penelitian	:	Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion*
Kategori Penelitian	:	Pembinaan/Peningkatan Kapasitas
Bidang Ilmu yang diteliti	:	Sains dan Teknologi
Prodi / Fakultas	:	Pendidikan Matematika/Tarbiyah & Keguruan
Jumlah Tim Peneliti	:	1 Orang

No.	Jenis Kegiatan	V*	f**	Satuan	Harga	Jumlah
1.	**PRA PELAKSANAAN**					
	Fotokopi Proposal	1	7	Eks	15.000,-	105.000,-
	Jilid Proposal	1	7	Eks	10.000,-	70.000,-
					SUBTOTAL	**175.000,-**
2.	**PELAKSANAAN**					
	Pengumpulan Data					
	Uang Harian	1	5	OH	300.000,-	1.500.000,-
	Penginapan	1	4	OH	450.000,-	1.800.000,-
	Transport (PP)	1	1	PP	600.000,-	600.000,-
	Diskusi Penyusunan Pelaporan					
	Konsumsi	6	2	OA	45.000,-	540.000,-
	Transport	6	2	OA	60.000,-	720.000,-
	Seminar Antara					
	Biaya Seminar Antara (Konsumsi, Transport, Honor Narasumber)	1	1	Paket	300.000,-	300.000,-
					SUBTOTAL	**5.460.000,-**
3.	**PASCA PELAKSANAAN**					
	Biaya Seminar Hasil (Konsumsi, Transport, Honor Narasumber)	1	1	Paket	300.000,-	300.000,-
	Fotokopi Laporan	1	10	Eks	35.000,-	350.000,-
	Jilid Laporan	1	10	Eks	20.000,-	200.000,-

	Publikasi di Jurnal Nasional	1	1	Jurnal	2.500.000,-	2.500.000,-
	HKI	1	1	HKI	1.700.000,-	1.700.000,-
					SUBTOTAL	**5.050.000,-**
4.	**BAHAN HABIS PAKAI**					
	Alat Tulis	1	10	Buah	25.000,-	250.000,-
	Kertas HVS	1	10	Rim	50.000,-	500.000,-
	Kertas Buram	1	5	Rim	25.000,-	125.000,-
	Tinta Printer Hitam	1	3	Buah	350.000,-	1.050.000,-
	Tinta Printer Warna	1	3	Buah	400.000,-	1.200.000,-
	Catridge Printer	1	2	Buah	375.000,-	750.000,-
	Flash Disk 32 GB	1	1	Buah	180.000,-	180.000,-
	Dokumen Keeper	1	2	Buah	60.000,-	120.000,-
	Materai	1	20	Buah	7.000,-	140.000,-
					SUBTOTAL	**4.315.000,-**
					TOTAL	**15.000.000,-**

*Catatan : * volume, ** frekuensi*

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301

Lampiran 2

JADWAL PELAKSANAAN PENELITIAN

Judul Penelitian	:	Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion*
Kategori Penelitian	:	Pembinaan/Peningkatan Kapasitas
Bidang Ilmu yang diteliti	:	Sains dan Teknologi
Prodi / Fakultas	:	Pendidikan Matematika/Tarbiyah & Keguruan

No.	**Kegiatan**	**Jul 2019**				**Ags 2019**				**Sep 2019**				**Okt 2019**			
		Minggu				**Minggu**				**Minggu**				**Minggu**			
		1	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**	**1**	**2**	**3**	**4**
1.	Studi literatur																
2.	Transformasi PDP menjadi PDB																
3.	Penerapan metode *Extended F-Expansion*																
4.	Penentuan penyelesaian eksak persamaan *m*KdV																
5.	Pembuatan grafik penyelesaian eksak persamaan *m*KdV																
6.	Kesimpulan																
7.	Penulisan laporan penelitian *dummy* buku																
8.	Pencetakan & penyerahan laporan penelitian																
9.	Penulisan Artikel ilmiah untuk dimuat di jurnal																
10.	Publikasi di jurnal nasional terindeks MORAREF																

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301

Lampiran 3

TARGET CAPAIAN LUARAN (*OUTCOME*)

Judul Penelitian	:	Penyelesaian Eksak Persamaan Gelombang *m*KdV Menggunakan Metode *Extended F-Expansion*
Kategori Penelitian	:	Pembinaan/Peningkatan Kapasitas
Bidang Ilmu yang diteliti	:	Sains dan Teknologi
Prodi / Fakultas	:	Pendidikan Matematika/Tarbiyah & Keguruan

No.	Capaian Luaran Penelitian			
	Jenis Luaran	**Sub Kategori**	**Wajib**	**Tambahan**
1.	Laporan Komprehensif	Laporan Penelitian Dummy Buku	√	-
2.	Artikel ilmiah dimuat di jurnal	Internasional Bereputasi	-	-
		Internasional	-	-
		Nasional Terakreditasi	-	-
		Nasional Terindeks MORAREF	√	-
3.	Artikel ilmiah dimuat diprosiding	Internasional Terindeks	-	-
		Internasional	-	-
		Nasional	-	-
4.	Hak Kekayaan Intelektual (HKI)	Paten	-	-
		Paten sederhana	√	-
		Hak Cipta	-	-
5.	Kerjasama Kemitraan Penelitian	MoU dan/ MoA	-	-
6.	Buku Ajar (Ber-ISBN)		-	-

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301

Lampiran 4

SURAT PERNYATAAN KEASLIAN

Yang bertanda tangan di bawah ini:

Nama	:	Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN	:	2017049301
NIPN (ID Peneliti)	:	201704930108001
Jabatan dalam Penelitian	:	Ketua Peneliti
Pangkat/Golongan	:	Penata Muda Tk.I/IIIb
Jabatan Fungsional	:	Asisten Ahli
Program Studi	:	Pendidikan Matematika
Fakultas	:	Tarbiyah dan Keguruan
Bidang Ilmu	:	Sains dan Teknologi

Dengan ini menyatakan bahwa penelitian saya dengan judul:

PENYELESAIAN EKSAK PERSAMAAN GELOMBANG *m*KdV MENGGUNAKAN METODE *EXTENDED F-EXPANSION*

yang diusulkan dalam skema penelitian Pembinaan/Peningkatan Kapasitas ke Pusat Penelitian dan Penerbitan LP2M UIN Ar-Raniry Banda Aceh untuk tahun anggaran 2019 bersifat orisinal dan belum pernah/tidak sedang diajukan dalam penyusunan tesis/disertasi, dan penelitian belum pernah/tidak sedang didanai oleh lembaga/sumber dana lain baik dari dalam maupun luar negeri, serta materi usulan terhindar dari plagiarism.

Bilamana di kemudian hari ditemukan ketidaksesuaian dengan pernyataan ini, maka saya bersedia dituntut dan diproses sesuai dengan ketentuan yang berlaku dan mengembalikan seluruh biaya penugasan yang sudah diterima ke Kas Negara.

Demikian pernyataan ini dibuat dengan sesungguhnya dan dengan sebenar-benarnya.

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301

Lampiran 5

BIODATA PENELITI

PUSAT PENELITIAN DAN PENERBITAN LP2M
UNIVERSITAS ISLAM NEGERI AR-RANIRY BANDA ACEH
TAHUN 2019

A. Identitas Diri

1.	Nama Lengkap *(dengan gelar)*	**Vina Apriliani, S.Si., M.Si.**
2.	Jenis Kelamin L/P	Perempuan (P)
3.	Jabatan Fungsional	Asisten Ahli
4.	NIP	199304172018012002
5.	NIDN	2017049301
6.	NIPN *(ID Peneliti)*	201704930108001
7.	Tempat dan Tanggal Lahir	Kuningan, 17 April 1993
8.	E-mail	vina.apriliani@ar-raniry.ac.id
9.	Nomor Telepon/HP	081389389778
10.	Alamat Kantor	Jl. Syeikh Abdurrauf, Kopelma Darussalam, Syiah Kuala, Banda Aceh
11.	Nomor Telepon/Faks	(0651) 53769
12.	Bidang Ilmu	Matematika
13.	Program Studi	Pendidikan Matematika
14.	Fakultas	Tarbiyah dan Keguruan

B. Riwayat Pendidikan

No.	Uraian	S1	S2	S3
1.	Nama PT	IPB	IPB	-
2.	Kota dan Negara PT	Bogor, Indonesia	Bogor, Indonesia	-
3.	Program Studi	Matematika	Matematika Terapan	-
4.	Tahun Lulus	2015	2016	-

C. Pengalaman Penelitian dalam 3 Tahun Terakhir

No.	Tahun	Judul Penelitian	Sumber Dana
1.	2016	Mathematical Model of Tuberculosis Spread within Two Groups of Infected Population	Program Studi Matematika IPB

D. Pengalaman Pengabdian Kepada Masyarakat dalam 3 Tahun Terakhir

No.	Tahun	Judul Pengabdian	Sumber Dana
1.	-	-	-

E. Publikasi Artikel Ilmiah dalam Jurnal dalam 5 Tahun Terakhir

No.	Judul Artikel Ilmiah	Nama Jurnal	Volume/Nomor/ Tahun/Url
1.	Mathematical Model of Tuberculosis Spread within Two Groups of Infected Population	Applied Mathematical Sciences	10/43/2016/doi.org/10.12988/ams.2016.63130
2.	Fungsi Zeta Riemann Genap Menggunakan Bilangan Bernoulli	Desimal: Jurnal Matematika	2/1/2019/doi.org/10.24042/djm.v2i1.3589

F. Karya Buku dalam 5 Tahun Terakhir

No.	Judul Buku	Tahun	Tebal Halaman	Penerbit
1.	-	-	-	-

G. Perolehan HKI dalam 10 Tahun Terakhir

No.	Judul/Tema HKI	Tahun	Jenis	Nomor P/ID
1.	-	-	-	-

Demikian biodata ini saya buat dengan sebenarnya.

Banda Aceh, 30 Oktober 2019
Ketua Peneliti,

Vina Apriliani, S.Si., M.Si.
NIDN. 2017049301